



Escola de Camins

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports
UPC BARCELONATECH

Resistencia a cortante en losas de puentes de hormigón bajo cargas puntuales y tracciones en su plano

Treball realitzat per:

Pau FIGUERAS CADENET

Dirigit per:

Antonio MARÍ BERNAT

Pablo GONZALO FERNANDEZ SANCHEZ

Màster en:

Enginyeria de Camins, Canals i Ports

Barcelona, 25/05/2019

Departament d'Enginyeria Civil i Ambiental

TREBALL FINAL DE MÀSTER

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría expresar mi más sincero agradecimiento a mi tutor, el profesor *Antonio Marí Bernat*, por la aportación de ideas, la transmisión de conocimiento y por su paciencia. Además, debo agradecerle las correcciones y consejos que ha realizado para este trabajo, sus aportaciones han permitido enriquecer enormemente este trabajo.

En segundo lugar, me gustaría agradecer especialmente al doctorando *Pablo Gonzalo Fernández*, que está realizando su doctorado sobre la resistencia a cortante en losas sometidas a cargas puntuales y a tracciones en su plano, entre otros temas de investigación. Sin su enorme predisposición a ayudar, su carácter formativo, su espíritu crítico y sus aportaciones de interés, este trabajo no hubiera podido ver la luz.

En la misma línea, me gustaría reconocer las aportaciones y el trabajo realizado por *Magí Domingo Tarancón* sobre el punzonamiento en losas sometidas a tracciones en el plano. Su trabajo ha permitido establecer una base de conocimiento para la parte numérica de este trabajo.

Por último, agradecer el soporte continuo e incondicional de mi familia, de mis amigos, de Montse y de Pau. Su apoyo a lo largo de mis estudios me ha permitido, con este trabajo, finalizar una etapa importante en mi vida.

Resumen

En la actualidad, las losas de hormigón armado son un elemento estructural fundamental para el mundo de la ingeniería civil y la edificación. Su comportamiento bidireccional, su fácil ejecución y su precio competitivo hacen de ellas una solución muy frecuente. El uso de este recurso estructural no es sujeto de actualidad, pues la ejecución de edificios y otras estructuras por medio de losas de hormigón armado se remonta a tiempos lejanos.

Si bien la composición de estas losas y sus características han cambiado poco en los últimos años, las normas de diseño y las condiciones de carga han evolucionado rápidamente. Por un lado, estructuras que fueron dimensionadas en décadas anteriores, para unas situaciones de carga adecuadas a su tiempo, se encuentran sometidas a niveles de tráfico consecuentemente mayores a sus cargas de diseño. Esto puede favorecer que las estructuras presenten daños y patologías de rotura. Por otro lado, varios autores apuntan que los estándares actuales son más exigentes que ciertas normativas locales, utilizadas antaño para dimensionar una importante cantidad de estructuras. Estos dos efectos, dejan en una situación comprometida una masa importante de la infraestructura occidental, vital para el correcto funcionamiento de nuestras sociedades.

La solución a esta problemática pasa por comprender mejor las estructuras desde un punto de vista físico-mecánico, con el fin de reevaluar los modelos empíricos que proponen las principales normativas actuales. Una de las patologías que se observa en las losas de hormigón armado sometidas a las cargas de tráfico (puntuales) es la rotura por cortante. Este trabajo tiene por objetivo estudiar la resistencia a cortante en losas sometidas a cargas puntuales y, simultáneamente, a tracciones en su plano. Esta combinación se puede dar, entre otros, en las zonas de los puentes sometidas a momentos negativos.

Debido a que la combinación de cargas puntuales y esfuerzos de tracción en el plano medio de la losa es un fenómeno poco estudiado, la *Universitat Politècnica de Catalunya* ha iniciado un proyecto de investigación que gira alrededor de dicha problemática. Este Trabajo

de Fin de Máster se enmarca en el proyecto de la *Politécnica*, con el fin de apoyar la campaña experimental prevista.

Más concretamente, este trabajo tiene por objetivo predecir los resultados experimentales y analizar múltiples configuraciones de estudio, con el fin de ayudar a la definición de los ensayos en laboratorio, así como a establecer una base de comparación con la normativa actual y los futuros resultados experimentales. Para cumplir dicho objetivo, en este trabajo se han realizado una serie de simulaciones numéricas con elementos finitos no-lineales (*NFEM*).

A partir del modelo *NFEM* hemos podido estudiar la influencia de varios parámetros, como el tamaño de malla o la posición de la carga con respecto al borde de la losa. Asimismo, hemos validado el correcto comportamiento de las simulaciones, permitiendo una estimación robusta de la reducción de resistencia a cortante con el aumento de las tracciones en el plano medio de la losa sometida a cargas puntuales.

El análisis de las simulaciones numéricas nos ha permitido obtener dos principales conclusiones. Por un lado, se ha confirmado la importante infravaloración que realizan las normativas vigentes al evaluar la capacidad resistente a cortante. Los resultados obtenidos presentan cargas máximas un 65-75% mayores que las normativas, prueba de la capacidad de redistribución de esfuerzos que presentan las losas. Por otro lado, se ha observado una reducción lineal de la resistencia a cortante conforme se aumenta el nivel de tracciones en el plano, estimada al 4.03%. Este comportamiento lineal se presenta para tensiones en el plano inferiores al 130% de la resistencia a tracción de la sección de la losa. Para rangos de tracciones superiores, desaparece el comportamiento lineal, debido a la plastificación prematura de las armaduras sometidas a importantes tensiones en el plano.

Palabras clave: Carga puntual, Losas, *NFEM*, Resistencia cortante, Tracciones

Abstract

Nowadays, reinforced concrete slabs are a fundamental structural element civil and building engineering. Their bidirectional behaviour, their easy execution and their competitive price make them a very frequent solution. Reinforced concrete slabs have been used for decades and they are currently a typical method of construction.

Slabs composition and their characteristics have changed little in recent years. However, design standards and loading conditions have evolved rapidly. On the one hand, structures designed in previous decades are subject to levels of traffic consistently higher than their design loads. Hence, these structures may face important damage and cracking pathologies. On the other hand, literature review suggests that current standards are more demanding than some local regulations, used in the past to design numerous structures. Bearing these points in mind, existing infrastructure might be in compromised situation.

The solution to this problem is to better understand the structures from a physical-mechanical point of view, in order to re-evaluate the empirical models proposed by the main current regulations. One of the cracking pathologies observed in reinforced concrete slabs subject to traffic loads (punctual) is one-way shear. The objective of this project is to study shear resistance on slabs subjected to point loads and, simultaneously, to axial tensions in its plane. This type of forces configuration is present in a wide range of structures such as negative moment zones on bridges, among others.

The combination of concentrated loads and tensile stresses on reinforced slabs is not a well-studied problem. For this reason, *Universitat Politècnica de Catalunya* has initiated a research project that revolves around this problem. This Final Master's Project is part of *Politécnica's* project, and it supports its planned experimental campaign.

More specifically, this memoir aims to predict experimental results and analyse multiple case scenario. This will contribute to the definition of laboratory tests and to establish a basis for comparison with current regulations and future experimental results. In order to fulfil this objective, a series of numerical simulations with non-linear finite elements methods (NFEM) have been performed.

NFEM simulations have been used to study the influence of several parameters, such as the mesh size or the load position with respect to the slab's edge, validating the correct behaviour of the model. This has allowed to estimate the shear resistance reduction with respect of increasing axial tensions in the mid-plane of the slab subjected to point loads.

Numerical simulation analysis has allowed to draw two main conclusions. On the one hand, the significant underestimation made by the current regulations when evaluating the shear strength capacity was confirmed. The results obtained show maximum loads 65-75% higher than the normative ones, proof of the redistribution capacity of the slabs. On the other hand, a linear reduction of the shear strength has been observed as the level of in-plane tractions increase, estimated at 4.03%. This linear behaviour occurs for in-plane stresses below the 130% of slab's section tensile strength. For higher tractions, linear behaviour disappears due to the premature plasticization of the reinforcement bars, subjected to important in-plane stresses.

Keywords: Axial tension, Concentrated loads, NFEM, Shear strength, Slabs

Índice general

AGRADECIMIENTOS	3
RESUMEN	4
ABSTRACT	6
ÍNDICE GENERAL	8
ÍNDICE DE FIGURAS	12
ÍNDICE DE TABLAS	15
1 INTRODUCCION Y OBJETIVOS	16
1.1 INTRODUCCIÓN	16
1.2 MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS	19
1.3 ESTRUCTURA DEL TRABAJO	20
2 REVISION DEL ESTADO DEL CONOCIMIENTO	22
2.1 MECÁNICA DEL ESFUERZO CORTANTE	22
2.1.1 RESISTENCIA DE LA CABEZA DE COMPRESION	23
2.1.2 TENSION RESIDUAL EN LA ZONA FISURADA	24
2.1.3 FRICCION DE LOS ARIDOS	24
2.1.4 EFECTO PASADOR - ARMADURA LONGITUDINAL	25
2.1.5 <i>TRUSS ACTION</i> - ARMADURA TRANSVERSAL	26
2.1.6 EFECTO ARCO	26
2.2 ESFUERZO CORTANTE EN LOSAS	27
2.2.1 PRE-FISURACION EN LOSAS	32
2.2.2 TAMAÑO DE LA ZONA DE CARGA	33
2.2.3 DISTANCIA ENTRE LA CARGA Y EL APOYO	34
2.2.4 CONCLUSIONES	36

2.3	NORMATIVA Y ESFUERZO CORTANTE	38
2.3.1	EN 1992-1-1: NORMAS GENERALES Y NORMAS PARA EDIFICACION	38
2.3.2	ACI 318M-14: BUILDING CODE REQUIREMENTS FOR STRUCTURAL CONCRETE	45
2.3.3	COMPARACION ENTRE LAS NORMATIVAS Y LA REALIDAD	48
2.4	RESUMEN	52
3	SIMULACION DEL CORTANTE EN LOSAS CON ELEMENTOS FINITOS	54
3.1	INTRODUCCIÓN A LOS ELEMENTOS FINITOS	55
3.2	DEFINICIÓN DEL MODELO	61
3.2.1	DEFINICION DE LA LOSA	61
3.2.2	DEFINICION DE LAS PROPIEDADES MATERIALES	64
3.2.3	DEFINICION DE LA SIMULACION NUMERICA	76
3.3	RESULTADOS	80
3.3.1	ESTUDIO PARAMETRICO DEL MODELO	82
3.3.2	RESULTADOS DEL MODELO BASE	94
3.3.3	COMPARACION MODELO-NORMATIVA	98
3.4	RESUMEN	99
4	EFFECTO DE LAS TRACCIONES EN LA RESISTENCIA A CORTANTE EN LOSAS	101
4.1	CONSIDERACIONES ADICIONALES PARA LA SIMULACIÓN	101
4.2	COMPARACIÓN ENTRE MOTORES DE CÁLCULO	103
4.3	RESULTADOS	106
4.3.1	RESULTADOS DEL MODELO CON TRACCIONES	107
4.3.2	COMPARACION MODELO-NORMATIVA	117
4.4	RESUMEN	119
5	CONCLUSIONES	121
	BIBLIOGRAFIA	126
	ANEJOS	130
	ANEJO 1: PLANOS	130
	ANEJO 2: CÁLCULOS	136
	VERIFICACION A CORTANTE (CASO BASE)	136
	CALCULO DE LAS TRACCIONES ADMISIBLES	138

VERIFICACION A CORTANTE (CASO CON TRACCIONES EN EL PLANO)	138
ANEJO 3: RESULTADOS GRÁFICOS Y CARTOGRAFÍAS	140

Índice de figuras

<i>Figura 1.1: Ejemplo de rotura por cortante en una viga [1].....</i>	<i>17</i>
<i>Figura 1.2: Puente por voladizos sucesivos sometido a momentos negativos durante la construcción (vano en construcción) y en su fase final (sobre apoyo), con posibles cargas puntuales en sus extremos.....</i>	<i>18</i>
<i>Figura 2.1: Fuerzas actuantes en una fisura por cortante en una viga [2]</i>	<i>23</i>
<i>Figura 2.2: Tensiones y deformaciones en la zona fisurada [8]</i>	<i>24</i>
<i>Figura 2.3: Contacto áridos-matriz de cemento (izquierda) y estado tensional (derecha) [9].....</i>	<i>25</i>
<i>Figura 2.4: Esquema del efecto pasador [12]</i>	<i>26</i>
<i>Figura 2.5: Efecto arco en una viga [17]</i>	<i>27</i>
<i>Figura 2.6: Rotura por cortante (izquierda); Rotura por punzonamiento (derecha) [18]</i>	<i>28</i>
<i>Figura 2.7: Ejemplo de estructura sometida a una carga lineal y con apoyo (alma) lineal [20]</i>	<i>29</i>
<i>Figura 2.8: Ejemplos de repartición de una carga puntual sobre losas. Izquierda: cargas puntuales sobre un cajón de hormigón armado de un puente [20]. Derecha: repartición transversal y ancho efectivo propuesto por el anejo nacional francés del Eurocódigo [21]</i>	<i>29</i>
<i>Figura 2.9: Condiciones de los ensayos realizados por Eva Lantsoght [18]</i>	<i>31</i>
<i>Figura 2.10: Comparación de modos de rotura entre una losa con pequeña distancia carga-apoyo (arriba) y otra con mayor distancia carga-apoyo (abajo) [23].....</i>	<i>35</i>
<i>Figura 2.11: Diferencia entre los patrones de fisura por cortante de una viga (izquierda) y de una losa (derecha). Las imágenes corresponden a la parte inferior de la estructuras y las líneas negras representan las fisuras en el hormigón [18]</i>	<i>36</i>
<i>Figura 2.12: Influencia del ancho total de la losa en la capacidad de resistencia a cortante [18].....</i>	<i>37</i>
<i>Figura 2.13: Definición de A_{sl} en la expresión de $V_{Rd,c}$ [24].....</i>	<i>40</i>
<i>Figura 2.14: Modelo de bielas y tirantes para el caso de elementos que contienen armaduras de esfuerzo cortante [24]</i>	<i>41</i>
<i>Figura 2.15: Logigrama para la verificación a cortante.....</i>	<i>42</i>
<i>Figura 2.16: Cargas aplicadas a proximidad de los apoyos [24]</i>	<i>43</i>
<i>Figura 2.17: Repartición transversal y ancho efectivo propuesto por el anejo nacional holandés del Eurocódigo [18].....</i>	<i>44</i>
<i>Figura 2.18: Repartición transversal y ancho efectivo propuesto por el anejo nacional francés del Eurocódigo [21].....</i>	<i>44</i>
<i>Figura 2.19: Repartición transversal y ancho efectivo propuesto por el anejo nacional alemán del Eurocódigo [26].....</i>	<i>45</i>
<i>Figura 2.20: Formulación a utilizar para el cálculo de V_c según ACI 318M-14 [25]</i>	<i>47</i>

Figura 2.21: Comparación entre anchos efectivos experimentales y teóricos. Derecha: para los distintos anchos de losa, con $a/d=4,16$. Izquierda: para las distintas relaciones a/d , con una losa de 3,5m de ancho [29]	49
Figura 2.22: Esquemización de los experimentos de Rodrigues (izquierda) y Latte (derecha) [3]	51
Figura 2.23: Comparación entre los resultados experimentales y las normativas o modelos de cálculo [3]	52
Figura 3.1: Ejemplo de “snap-through” (izquierda) y de “snap-back”(derecha) en curvas de carga-desplazamiento [34]	58
Figura 3.2: Esquema de las dimensiones de la placa y configuración de sus apoyos y zona de carga	62
Figura 3.3: Esquema de las armaduras de la cara superior de la losa [36].....	64
Figura 3.4: Relaciones constitutivas definidas en ABAQUS para modelar la compresión uniaxial del hormigón [41].....	68
Figura 3.5: Relación compresión-deformación (derecha) y curva introducida en ABAQUS para la rama post-elástica (izquierda), considerando únicamente deformaciones inelásticas [36].....	70
Figura 3.6: Curva tensión-abertura de fisura que caracteriza el modelo de energía de fractura [41].....	71
Figura 3.7: Representación esquemática de las relaciones tensión-deformación (izquierda) y tensión-abertura de fisura (derecha) propuestas por el Model Code [28].....	72
Figura 3.8: Relación tracción-deformación (derecha) y curva introducida en ABAQUS para la rama post-elástica (izquierda), considerando únicamente deformaciones de ruptura [36].....	75
Figura 3.9: Diagrama tensión-deformación del acero modelado	75
Figura 3.10: Esquema de la simetría de la losa.....	77
Figura 3.11: Modelo de elementos finitos creado en ABAQUS	79
Figura 3.12: Resistencia relativa en vigas para distintos valores de a/d [46].....	81
Figura 3.13: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos tamaños de malla	82
Figura 3.14: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos tamaños de malla - Mallas pequeñas.....	83
Figura 3.15: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos tamaños de malla - Mallas pequeñas - Zona post-elástica.....	85
Figura 3.16: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos valores a/d - Rotura a flexión	89
Figura 3.17: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos valores a/d - Rotura a cortante	89
Figura 3.18: Tensiones principales máximas - Simulación con carga centrada	91
Figura 3.19: Tensiones principales máximas - Simulación con $a/d=3$	92
Figura 3.20: Tensiones principales máximas - Simulación con $a/d=2.5$	92
Figura 3.21: Tensiones principales máximas - Simulación con $a/d=2.25$	92
Figura 3.22: Tensiones principales máximas - Simulación con $a/d=3$ - Detalle de la rotura	93
Figura 3.23: Curva Carga-Desplazamiento para el caso base - Malla 20mm - $a/d=2.5$	94
Figura 3.24: Tensiones principales máximas - Simulación del caso base - Cara inferior.....	95
Figura 3.25: Deformaciones plásticas principales máximas - Simulación del caso base.....	95
Figura 3.26: Tensiones principales máximas - Cara inferior - Estado de carga anterior a la micro-fisuración	96
Figura 3.27: Tensiones principales máximas - Cara inferior - Estado de carga posterior a la rotura.....	96
Figura 3.28: Tracciones en los aceros longitudinales inferiores - Estado de carga máximo	97

<i>Figura 3.29: Tracciones en los aceros longitudinales inferiores - Estado de carga que presenta el inicio de las plastificaciones (234kN).....</i>	<i>97</i>
<i>Figura 4.1: Barras Dywidag en la losa</i>	<i>102</i>
<i>Figura 4.2: Esquema explicativo para la aplicación de las tracciones en el modelo</i>	<i>102</i>
<i>Figura 4.3: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos valores a/d - Rotura a flexión - Motor explícito</i>	<i>104</i>
<i>Figura 4.4: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos valores a/d - Rotura a flexión - Motor implícito.....</i>	<i>104</i>
<i>Figura 4.5: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos niveles de tracción en el plano.....</i>	<i>107</i>
<i>Figura 4.6: Ajuste lineal de T/T_{fis} para $T \leq T_{fis}$</i>	<i>108</i>
<i>Figura 4.7: Resistencia a cortante en función de las tracciones en el plano aplicadas - Línea azul, simulaciones $0\%T_{fis}$ - $130\%T_{fis}$; Línea naranja, simulaciones $140\%T_{fis}$ - $150\%T_{fis}$</i>	<i>109</i>
<i>Figura 4.8: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos niveles de tracción en el plano - Rama elástica</i>	<i>110</i>
<i>Figura 4.9: Deformaciones plásticas máximas (tracciones) en la cara inferior para el momento en que se inicia la fisuración - Simulaciones con tracciones de $0\%T_{fis}$, $50\%T_{fis}$, $100\%T_{fis}$ y $150\%T_{fis}$.....</i>	<i>111</i>
<i>Figura 4.10: Deformaciones plásticas máximas (tracciones) en la cara inferior para el modelo $100\%T_{fis}$ - Inicio del ensayo (izquierda) y inicio de la rama post-elástica (derecha)</i>	<i>112</i>
<i>Figura 4.11: Tensiones principales máximas en la cara inferior después del tesado - Simulaciones con tracciones de $50\%T_{fis}$, $100\%T_{fis}$ y $150\%T_{fis}$ (de izquierda a derecha y de arriba abajo).....</i>	<i>113</i>
<i>Figura 4.12: Tensiones principales máximas en la cara superior y en el plano medio para el momento de carga máxima - Simulaciones con tracciones de $0\%T_{fis}$, $50\%T_{fis}$, $100\%T_{fis}$ y $150\%T_{fis}$.....</i>	<i>114</i>
<i>Figura 4.13: Tensiones principales máximas en los aceros transversales para el modelo $150\%T_{fis}$ - Inicio del ensayo (izquierda) y momento de carga máxima (derecha).....</i>	<i>115</i>
<i>Figura 4.14: Tensiones principales máximas en los aceros longitudinales para el modelo $150\%T_{fis}$ - Momento de carga máxima</i>	<i>115</i>
<i>Figura 4.15: Deformaciones plásticas máximas (tracciones) en la cara inferior para el momento de carga máxima - Simulaciones con tracciones de $0\%T_{fis}$, $50\%T_{fis}$, $100\%T_{fis}$ y $150\%T_{fis}$ (de izquierda a derecha y de arriba abajo).....</i>	<i>116</i>

Índice de tablas

<i>Tabla 2.1: Aumento de la carga última con respecto al aumento del tamaño de la zona de carga [18]</i>	<i>33</i>
<i>Tabla 2.2: Aumento de la carga última con respecto al aumento del tamaño de la zona de carga en función del ancho de losa [18].....</i>	<i>33</i>
<i>Tabla 2.3: Comparación de las cargas últimas entre dos distancias apoyo-carga: 60cm y 40cm [18].....</i>	<i>35</i>
<i>Tabla 2.4: Anchos efectivos experimentales y teóricos para distintos códigos [18]</i>	<i>48</i>
<i>Tabla 2.5: Comparación entre el Eurocódigo y los valores experimentales [18].....</i>	<i>50</i>
<i>Tabla 3.1: Cargas máximas de rotura para distintos tamaños de malla</i>	<i>86</i>
<i>Tabla 3.2: Número de elementos y coste computacional para distintos tamaños de malla</i>	<i>86</i>
<i>Tabla 3.3: Comparación normativa-simulación para las cargas máximas de rotura</i>	<i>98</i>
<i>Tabla 4.1: Comparación entre métodos de resolución numéricos para las cargas máximas de rotura</i>	<i>106</i>
<i>Tabla 4.2: Carga máxima para cada uno de los modelos con distintos niveles de tracción estudiados</i>	<i>107</i>
<i>Tabla 4.3: Cargas de fisuración asociadas a los respectivos casos de tracción en el plano.....</i>	<i>110</i>
<i>Tabla 4.4: Tensión máxima en las armaduras transversales al final del tesado, para los respectivos casos de tracción en el plano.....</i>	<i>114</i>
<i>Tabla 4.5: Comparativa normativa-simulación para las cargas máximas de rotura y los respectivos casos de tracción en el plano.....</i>	<i>118</i>

1 Introducción y Objetivos

1.1 INTRODUCCIÓN

Las losas de hormigón armado son, en la actualidad, un elemento estructural fundamental para el mundo de la ingeniería civil y de la edificación. Su capacidad para salvar luces en dos direcciones, su comportamiento mecánico y su precio competitivo, las constituyen como un elemento constructivo vital para la ingeniería actual.

Estas losas pueden estar sometidas a diversas configuraciones de carga y estar apoyadas de formas muy diversas. Aunque las losas de hormigón sean elementos muy utilizados en la ingeniería, dicha variabilidad ocasiona múltiples comportamientos y mecanismos de rotura y daño.

Algunos de ellos son fáciles de interpretar y son bien conocidos. Ejemplo de ello es la flexión en losas o vigas, un fenómeno que se entiende completamente en el mundo académico y profesional y para el cual los códigos de diseño proponen soluciones que se adaptan bien a la realidad del terreno.

Sin embargo, hay otros fenómenos que, aún a día de hoy, constituyen temas de investigación académica: la verificación de la resistencia al esfuerzo cortante y el diseño de las estructuras a dicho esfuerzo son ejemplo de ello.

El esfuerzo cortante en losas suele generar dos posibles mecanismos de rotura, en función de sus condiciones de apoyo y de carga. Por un lado tenemos la rotura por cortante, o *one-way shear*. Este fenómeno sucede cuando la losa dispone de apoyos lineales y está sometida a cargas puntuales o lineales, relativamente cercanas a los apoyos. Por otro lado, la losa puede romper a punzonamiento (*two-way shear*). Este último fenómeno sucede cuando la losa está apoyada de forma puntual y se crea una cierta concentración de cargas, dando lugar a un cono de rotura.

Si bien en ciertas configuraciones los dos mecanismos de rotura anteriores se pueden superponer y interactuar, este trabajo tiene por objetivo tratar la rotura por cortante puro (*one-way shear*) en losas sometidas a cargas puntuales.

Para este mecanismo de rotura, cuando una losa o una viga de hormigón armado está sometida a una combinación de cargas de flexión y cortante, aparecen una serie de fisuras diagonales y los estados tensionales se vuelven multi-axiales en determinadas zonas de la estructura. Estos fenómenos son de una gran complejidad y dan lugar a una serie de mecanismos resistentes al esfuerzo cortante.

La interacción entre dichos mecanismos es muy diversa y compleja, motivo por el cual no se dispone, en la actualidad, de una formulación universal para evaluar la resistencia al esfuerzo cortante. En efecto, desde un punto de vista académico y normativo, si bien hace más de un siglo que el fenómeno se estudia en profundidad, las investigaciones han conducido a distintas expresiones analíticas o empíricas en función de los autores.

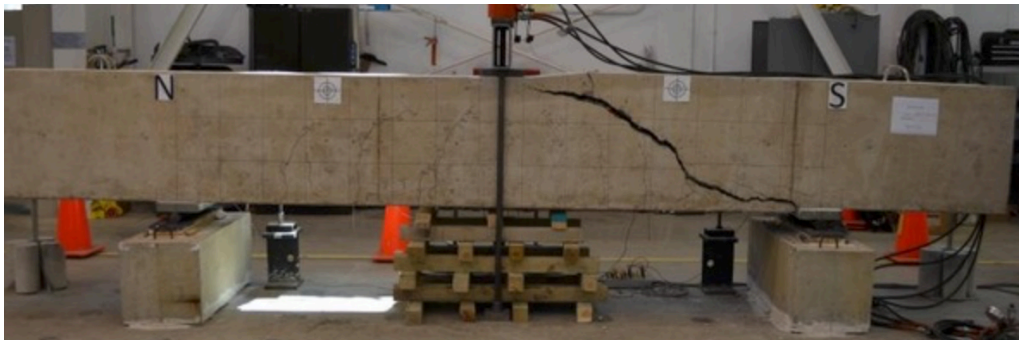


Figura 1.1: Ejemplo de rotura por cortante en una viga [1]

No disponer de una comprensión completa y universal del problema deja a los códigos de diseño en una posición no muy confortable. Deben dar una solución para poder dimensionar múltiples estructuras sometidas al esfuerzo cortante y verificar su capacidad de resistencia, todo ello sin comprender en profundidad la física del problema. Es por ello que la mayoría de normativas de diseño se basan en modelos empíricos o semi-empíricos, basados en experiencias realizadas en laboratorios con, a priori, muestras representativas de la realidad.

Sin embargo, establecer como base de una norma universal para cualquier tipo de estructura una serie reducida de estructuras ensayadas en un laboratorio puede conllevar problemas. De hecho, múltiples autores indican que normativas como el *Eurocódigo* o la *ASCE-ACI* presentan una gran desviación con respecto a la realidad [2]-[3].

La complejidad que presenta la mecánica del problema también se traduce en la dificultad de evaluar qué parámetros influyen a la rotura por cortante y en qué magnitud lo hacen. A lo largo de este documento, trataremos de entender qué parámetros pueden influir en la rotura de una losa a cortante.

Un parámetro muy importante a estudiar es el efecto de las tracciones en el plano. Ya sea porque son losas enterradas en un terreno con muro pantalla o porque son losas de puentes que se encuentran en zonas de momentos negativos, la existencia de tracciones en el plano de una losa es una configuración más que recurrente en la ingeniería.

Sin embargo, la influencia de dichos esfuerzos axiales en la reducción de la capacidad de la placa para resistir al esfuerzo cortante sigue siendo una gran incógnita en el ámbito académico. Ya sea por medio de modelos analíticos o conceptuales, de ensayos empíricos en laboratorio o por medio de simulaciones con elementos finitos; el problema está muy poco estudiado.



Figura 1.2: Puente por voladizos sucesivos sometido a momentos negativos durante la construcción (vano en construcción) y en su fase final (sobre apoyo), con posibles cargas puntuales en sus extremos

Debido a la poca investigación sobre la rotura de losas por cortante y, más específicamente, sobre losas bajo cargas puntuales y tracciones en el plano con rotura por cortante; es de especial interés centrar nuestros esfuerzos en comprender y aportar un atisbo de luz a la problemática.

1.2 MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS

Presentada la problemática de las losas de hormigón armado con rotura a cortante debido a cargas puntuales y a tracciones simultáneas en el plano, parece interesante intentar comprender qué respuesta presenta un caso de estudio que sea capaz de representar y capturar la fenomenología en toda su complejidad.

Tal y como se ha indicado, el estudio de la problemática aún tiene un largo recorrido. Es por ello que, actualmente, hay un proyecto de investigación en curso alrededor de esta problemática. Este proyecto, intitulado *“Evaluación de la capacidad resistente frente a esfuerzos tangentes de estructuras de hormigón mediante modelos mecánicos para la extensión de su vida útil”* (Ref: BIA2015-64672-C4-1-R) y dirigido por el profesor *Antonio Marí Bernat* y por el doctorando *Pablo Gonzalo Fernández Sánchez*, ambos del Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la Escola Técnica Superior de Camins Canals i Ports (ETSCCP); tiene por objetivo realizar una serie de ensayos en laboratorio y de análisis numéricos y analíticos con el fin de caracterizar la pérdida de carga última que presentan las losas sometidas a cargas puntuales y a tracciones en el plano (ya sea por rotura a punzonamiento o a cortante).

Así pues, el principal objetivo de este trabajo es dar un soporte a los ensayos realizados por *Marí y Gonzalez*. Más concretamente, se trata de analizar, principalmente por medio de modelos de elementos finitos no-lineales, el comportamiento de las losas que se ensayaran más tarde en el laboratorio. Asimismo, el objetivo es presentar una base sólida para la realización de los ensayos, ya sea en términos de la respuesta tensión-deformación o carga-desplazamiento del modelo o en términos de la carga última a esperar.

Además, la elaboración del modelo de elementos finitos podrá servir al estudio de la influencia de algunos parámetros sobre la rotura de la losa ensayada (resistencia hormigón,

energía de fractura...), así como servir de base para el desarrollo de futuros modelos conceptuales.

De modo esquemático, los objetivos se pueden resumir en:

- Estado del conocimiento: búsqueda y análisis de información sobre la resistencia a cortante de losas bajo cargas puntuales y sobre los efectos de las tracciones;
- Creación de un modelo de elementos finitos base ($T=0$), con materiales con propiedades no-lineales, mediante el programa ABAQUS;
- Calibración del modelo base y estudio paramétrico de ciertas propiedades del hormigón;
- Simulación de losas con distintos niveles de tracciones longitudinales en el plano y análisis de su respuesta;
- Comparación de los resultados obtenidos con ciertas normativas o modelos conceptuales.

1.3 ESTRUCTURA DEL TRABAJO

En el capítulo 2 se presenta una revisión del estado del conocimiento. El objetivo es proveer al lector de la estructura necesaria para comprender la problemática y acotar el conocimiento académico existente alrededor de la problemática enunciada.

En el capítulo 3 se presenta el modelo de elementos finitos realizado con el fin de simular los futuros experimentos que se realizarán en el laboratorio. En primer lugar, se definirá el modelo en términos de geometría, propiedades constitutivas de los materiales, condiciones de contorno y metodología de cálculo numérico a utilizar. A continuación, se realizará un análisis paramétrico de algunas características constitutivas del hormigón y de las condiciones de ensayo, con el fin de estudiar la sensibilidad del modelo. Esto último nos permitirá calibrar el modelo para futuras investigaciones.

En el capítulo 4 se analizarán los efectos de las tracciones en el plano con relación al modelo numérico previamente definido. Se estudiará el comportamiento en términos de deformaciones y esfuerzos, con el fin de servir a la futura campaña experimental. Asimismo,

compararemos los resultados obtenidos con las provisiones propuestas por algunas normativas y con otros ensayos que se puedan encontrar en la literatura.

Finalmente, el último capítulo presentará las conclusiones del trabajo y las posibles futuras vías de investigación.

2 Revisión del estado del conocimiento

Uno de los principales objetivos de este trabajo es aportar al lector los elementos necesarios para comprender el problema de la rotura por cortante en losas sometidas a cargas puntuales y a tensiones axiales en el plano, en toda su complejidad. Así pues, este trabajo pretende introducir cuáles son los mecanismos de resistencia al esfuerzo cortante, identificar las características intrínsecas que presentan las losas sometidas a cargas puntuales y esbozar cuáles son las soluciones en términos de diseño que se proponen, a día de hoy, en la literatura; entre otros.

La revisión del estado del conocimiento nos permite dar respuesta y ejemplificar algunas de las cuestiones precedentes. Asimismo, nos permite cerner la profundidad con la que la problemática ha sido estudiada; punto clave para la contextualización de cualquier trabajo científico o social.

2.1 MECÁNICA DEL ESFUERZO CORTANTE

Previamente hemos enunciado que el esfuerzo cortante en placas, bajo cargas puntuales, adquiere un cierto comportamiento tridimensional. En cierto modo, la “mecánica del problema”, es decir, la comprensión del problema desde un punto de vista físico, requiere la explicación de fenómenos tridimensionales.

No obstante, establecer una base sólida para una simplificación del caso de estudio puede ser de vital importancia para entender, a posteriori, los comportamientos tridimensionales.

Este apartado tiene el objetivo de presentar la mecánica del esfuerzo cortante para vigas, fenómeno por el cuál hay, en la actualidad, mayor conocimiento y consenso académico que para el caso de las losas.

De acuerdo con ciertas normativas [4] y con múltiples estudios académicos, los mecanismos resistentes que se desarrollan en las vigas y permiten resistir al esfuerzo cortante se pueden agrupar en:

- Contribución de la cabeza de compresión (zona no fisurada) - V_c ,
- Contribución de la zona fisurada por medio de las tensiones residuales (V_w) y de la fricción de los áridos a través de la fisura (*aggregate interlock*) ,
- Contribución de la armadura longitudinal por medio del efecto pasador (*dowel action*) - V_l ,
- Contribución de la armadura transversal (*truss action*) - V_s .

Esquemáticamente, encontramos las acciones anteriores en la figura siguiente:

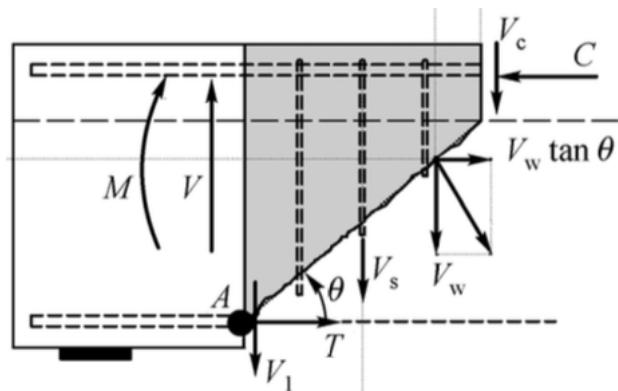


Figura 2.1: Fuerzas actuantes en una fisura por cortante en una viga [2]

2.1.1 Resistencia de la cabeza de compresión

Una viga sometida a flexión desarrolla, en su parte superior, por encima del eje neutro, una zona sometida a compresiones. Esta recibe el nombre de cabeza de compresión. En ella se manifiestan tensiones tangenciales que permiten la resistencia al esfuerzo cortante. La capacidad de resistencia a cortante que aporta la cabeza de compresión es, sencillamente, el resultado de integrar dichas tensiones tangenciales a lo largo de la profundidad de la zona comprimida.

Así pues, es lógico enunciar que, en cuanto a la aportación de la cabeza de compresión a la resistencia a cortante, los parámetros que la determinan son la profundidad y amplitud de la zona de compresión (zona en la que integraremos los esfuerzos) y la resistencia a compresión del hormigón [5].

Con el fin de tener un orden de magnitud de la importancia de dicho mecanismo en la resistencia global de la viga a cortante, es interesante indicar que la resistencia de la cabeza de compresión contribuye entre un 20% [6] y un 40% [7].

2.1.2 Tensión residual en la zona fisurada

Las fisuras producidas en el hormigón no son exactamente “limpia”, es decir, el material no se separa perfectamente en dos partes completamente desacopladas. En la misma fisura podemos encontrar partículas de hormigón (áridos con cemento) que aún conectan las dos zonas separadas por la fisura. Así pues, en las fisuras existe una cierta tensión residual que contribuye a la resistencia a cortante.

Cabe indicar que la tensión residual se considera únicamente en la zona para la cuál el valor de la deformación axial supera la máxima deformación axial admisible, ϵ_{ct} , relacionada con f_{ctm} .

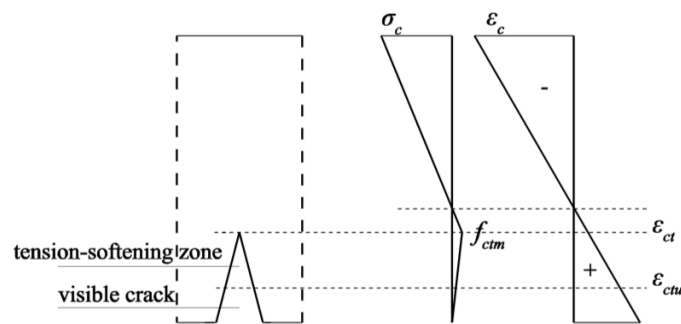


Figura 2.2: Tensiones y deformaciones en la zona fisurada [8]

2.1.3 Fricción de los áridos

Habitualmente, la resistencia de la pasta de cemento endurecida es menor que la resistencia del propio árido. Esto provoca que, en el seno de las fisuras, las superficies de contacto entre las dos caras de las fisuras no sean lisas y, por consiguiente, existe un cierto contacto o “engranamiento” entre los áridos de ambas partes. Esta fricción entre áridos constituye un mecanismo de resistencia al esfuerzo cortante (*aggregate interlock*).

Los factores que influyen en la resistencia al cortante por fricción entre áridos son: la microestructura del hormigón, la energía de fractura del hormigón y el tamaño y el tipo de árido.

Para entender de forma sucinta el problema físico, podemos observar el modelo de fricción de áridos desarrollado por *Walraven* [9]. El autor considera el hormigón como una

división entre partículas infinitamente rígidas (áridos) y una matriz con plasticidad perfecta (cemento). En este modelo, *Walraven* propone dos mecanismos de resistencia a cortante:

- Desplazamiento relativo entre los áridos y la matriz de cemento, en direcciones opuestas para cada lado de la fisura;
- Deformaciones irreversibles de la matriz de cemento en zonas sometidas a grandes esfuerzos.

Esquemáticamente, representamos este modelo teórico con las figuras siguientes:

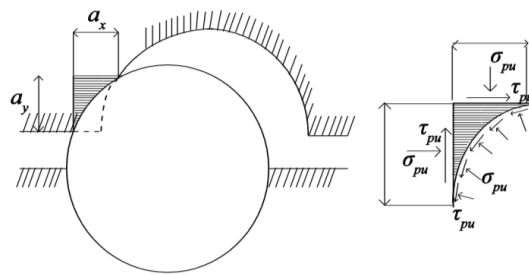


Figura 2.3: Contacto áridos-matriz de cemento (izquierda) y estado tensional (derecha) [9]

En cuanto a la contribución de este mecanismo a la resistencia global al esfuerzo cortante, el mundo académico no ha llegado a un consenso. Ciertos estudios enuncian que, para el caso de vigas, la fricción de los áridos contribuye a un 33% de la resistencia total al esfuerzo cortante [10]. Otros apuntan que este valor puede ascender hasta un 70% [11].

2.1.4 Efecto pasador - Armadura longitudinal

La zona de hormigón que se encuentra entre dos fisuras consecutivas se puede considerar, intuitivamente, que se moverá solidariamente. Así pues, entre dos fisuras, tenemos dos secciones de hormigón que pueden presentar un cierto desplazamiento relativo conforme la viga o la losa siguen los movimientos de flexión. Este diferencial de desplazamiento es resistido por la armadura longitudinal, cómo si estuviera empotrada de parte y otra en cada sección de hormigón y que en su zona libre (esto es, en el seno de la fisura) resistiera a un esfuerzo cortante parcialmente vertical. Esquemáticamente, se puede entender este mecanismo con la imagen siguiente:

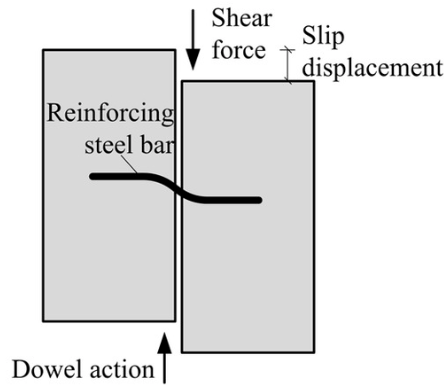


Figura 2.4: Esquema del efecto pasador [12]

Debido que la aportación del efecto pasador se relaciona directamente con la deformación de la barra bajo un esfuerzo cortante, parámetros como la apertura de fisura, el tipo de acero o el diámetro de la barra, juegan un rol principal en dicha aportación a la resistencia a cortante.

Es interesante indicar que ciertos estudios académicos apuntan que el efecto pasador es menos importante en losas que en vigas, debido a que la apertura de fisura en las losas no se realizará sobre todo su ancho y que estas poseen armaduras importantes en las dos direcciones [13]. Sin embargo, no existe un consenso general al respecto, pues otros autores indican que el efecto pasador es bastante importante en placas [14]. A título informativo, *Taylor* estima su contribución a la resistencia global a cortante alrededor del 15% en [10].

2.1.5 *Truss action* - Armadura transversal

Las armaduras transversales, habitualmente verticales, permiten cubrir las zonas fisuradas por el esfuerzo cortante y transmitir los esfuerzos de la parte inferior de la losa/viga a la parte superior. El lector puede imaginar el clásico esquema de celosía de *Ritter-Mörsch* [15]-[16], donde los esfuerzos que transitan los tirantes verticales son transmitidos por las armaduras transversales.

Es importante indicar que las armaduras transversales en losas no suelen ser muy importantes, si bien lo son en ciertas vigas.

2.1.6 Efecto arco

Tal y como veremos a lo largo de este trabajo, la proximidad entre el punto de aplicación de las cargas y los puntos de apoyo es un parámetro fundamental para la

resistencia a cortante y para la mecánica de rotura de una losa. Así pues, es de especial interés introducir, en este apartado, el comportamiento de la zona comprimida al acercarnos a los apoyos.

Se puede constatar que la “banda” que caracteriza la cabeza de compresión, al acercarse a los apoyos, se inclina hacia estos. Este fenómeno recibe el nombre de efecto arco. Gráficamente:

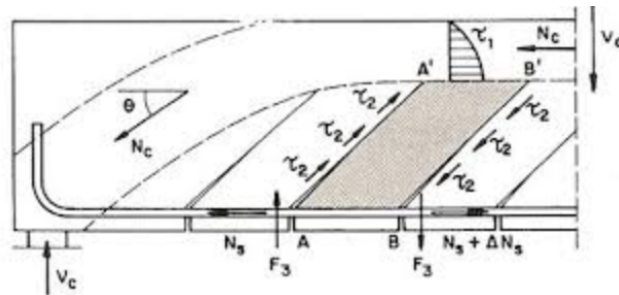


Figura 2.5: Efecto arco en una viga [17]

De la figura anterior, podemos constatar que la fuerza de compresión (N_c) se inclina y que, por consiguiente, su componente vertical se ve reducida ($N_c \cdot \sin \theta$). Así pues, parte del esfuerzo cortante exterior es transmitido directamente al apoyo. Asimismo, si la armadura longitudinal está bien anclada en los apoyos, se forma un arco atirantado que permite aumentar la resistencia a cortante.

No obstante, es trivial observar que el efecto arco genera una cierta sobrecarga a las armaduras longitudinales. Así pues, podemos concluir que el efecto arco está fuertemente condicionado por la cuantía de armaduras longitudinales.

2.2 ESFUERZO CORTANTE EN LOSAS

Tal y como se ha indicado en la introducción de este trabajo, las placas sometidas a esfuerzo cortante se verifican para dos estados límites: rotura por cortante (*one-way shear*) y rotura por punzonamiento (*two-way shear* o *punching shear*). Visualmente, apreciamos sus diferencias en la imagen siguiente:

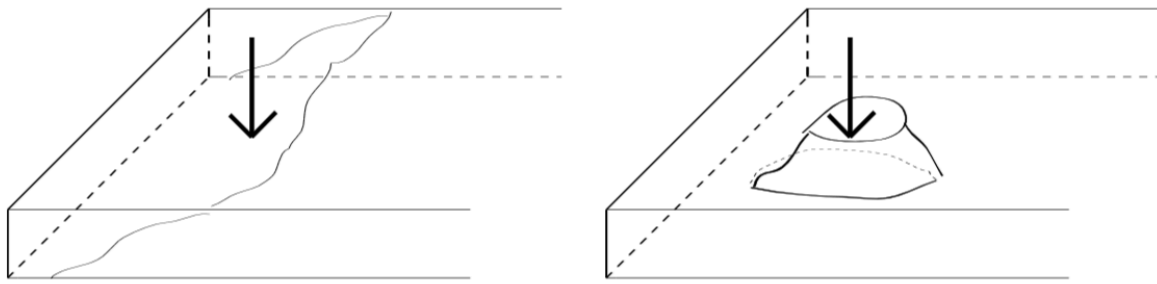


Figura 2.6: Rotura por cortante (izquierda); Rotura por punzonamiento (derecha) [18]

La rotura por cortante, tal y como se puede constatar en la imagen anterior, es un fenómeno menos localizado que la rotura por punzonamiento. Sin embargo, es importante notar que ambos mecanismos de rotura presentan comportamientos tridimensionales en losas.

Para el caso de una viga, la fisura diagonal que caracteriza la rotura por cortante se propaga, habitualmente, en todo el ancho de la viga. Sin embargo, la extrapolación de dicho comportamiento para el caso de las losas no siempre es directo.

Una práctica de diseño muy extendida para elementos que presentan una componente longitudinal importante con respecto a sus otras dos magnitudes (ciertas losas pueden ser ejemplo de ello) es la utilización y estudio de “secciones por metro lineal”. Este concepto radica en suponer que un elemento estructural presenta las mismas características de apoyo y de cargas a lo largo de su magnitud principal, es decir, de la longitud. Debido a que múltiples condiciones de carga se alinean con dichas configuraciones, la mayoría de normativas de diseño proponen dimensionar y verificar el cortante en losas como un caso particular de los fenómenos que suceden en vigas.

Esta práctica de diseño puede ser adecuada para cargas aplicadas linealmente a lo largo de la longitud. De hecho, recientes estudios demuestran que las losas sometidas a cargas lineales que rompen por cortante (*one-way shear*) presentan un comportamiento muy similar a las vigas y, además, las normativas de diseño son capaces de proveer una buena aproximación de la capacidad de resistencia a cortante [19].

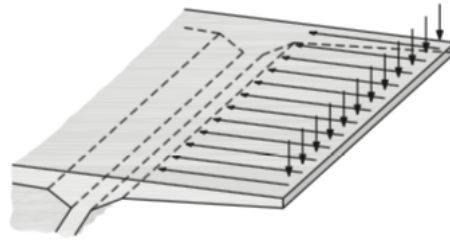


Figura 2.7: Ejemplo de estructura sometida a una carga lineal y con apoyo (alma) lineal [20]

No obstante, las losas sometidas a cargas puntuales cerca de los apoyos presentan un comportamiento distinto. Experimentalmente, se ha podido observar que los esfuerzos en la losa tienen una cierta redistribución transversal entre el punto de aplicación de la carga y la línea de apoyos. Intuitivamente, dicha redistribución transversal de los esfuerzos posibilita el trabajo de una mayor zona en la losa de hormigón armado. La zona en que los esfuerzos son repartidos recibe el nombre de ancho efectivo (b_{eff}). Esta activación y movilización de un cierto ancho efectivo genera un aumento de la capacidad de resistencia al cortante.

Si bien ciertas normativas consideran la posibilidad de dicha redistribución horizontal de esfuerzos, su consideración depende de prácticas y códigos locales. Trataremos este punto en detalle en §2.3.

En la siguiente imagen se pueden encontrar dos ejemplos de la repartición transversal de esfuerzos:

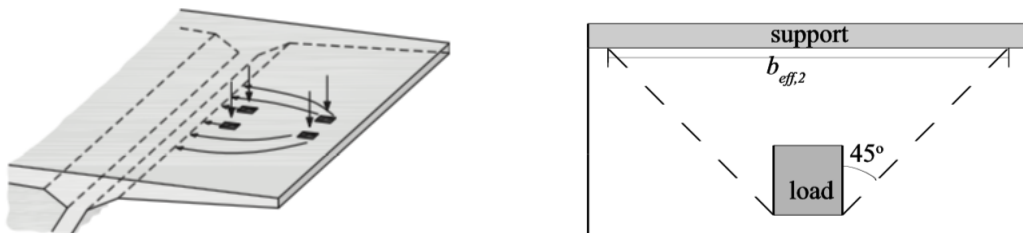


Figura 2.8: Ejemplos de repartición de una carga puntual sobre losas. Izquierda: cargas puntuales sobre un cajón de hormigón armado de un puente [20]. Derecha: repartición transversal y ancho efectivo propuesto por el anejo nacional francés del Eurocódigo [21]

La redistribución de esfuerzos se puede considerar como un comportamiento “fundamental” o propio de las placas que presentan rotura por esfuerzo cortante. Así pues, es de especial interés conocer en que configuraciones podemos considerar que una placa

romperá por cortante (*one-way shear*) y que presentará una redistribución de esfuerzos. Principalmente, podemos atribuir la rotura por cortante en losas descrita anteriormente a las siguientes configuraciones:

- Proximidad de la carga puntual al apoyo lineal: $a/d_l < 2.5$

La distinción entre una rotura por flexión y una rotura por cortante radica en varios parámetros. Uno de los más importantes es la distribución de la armadura en la estructura. Asimismo, un parámetro externo fundamental que diferencia ambos tipos de rotura es la posición de la carga exterior.

Para obtener una rotura por cortante, es necesario que la carga este suficientemente cerca del apoyo. Experimentalmente, se ha observado que una relación $a/d_l < 2.5$ es adecuada para los ensayos que visan examinar la rotura por cortante; donde “ a ” es la distancia entre el centro de aplicación de la carga y el apoyo, y “ d_l ” es la profundidad efectiva de las armaduras longitudinales.

- Suficiente ancho en la losa: $b > b_{eff}$

En un caso ideal, para que la carga se puede redistribuir a lo largo y ancho de la losa, es necesario que el ancho total de la losa (b) sea mayor o igual que el ancho efectivo (b_{eff}) solicitado. Si esto no se cumple, los esfuerzos se redistribuirán parcialmente y nos encontramos con la configuración del esfuerzo cortante en vigas estrechas.

Se puede concluir que la redistribución de esfuerzos en losas bajo cargas puntuales transforma el problema bidimensional en vigas a un problema tridimensional en placas. Varios investigadores han señalado recientemente que, si bien el esfuerzo cortante es una problemática que se estudia desde hace más de 100 años, conocemos muy poco sobre el complejo comportamiento de las losas que presentan rotura por cortante.

Eva Lantsoght realiza un interesante ejercicio en [18] que ilustra perfectamente la problemática. La autora realiza una compilación de ensayos (*database*) que se han realizado sobre vigas de gran ancho y sobre losas. Para una *database* de 215 experimentos, únicamente 22 losas o vigas de gran ancho cumplen con las condiciones necesarias para que la estructura rompa por cortante activando completamente el efecto de la redistribución transversal de esfuerzos ($a/d_l < 2.5$; $b > b_{eff}$, carga puntual). Estos números ponen de manifiesto el desconocimiento sobre el comportamiento de las losas con rotura por cortante.

Debido a los escasos datos disponibles en la literatura, *Lantsoght* realizó una serie de experimentos con el fin de comprender el problema con mayor profundidad. Construyó y ensayó un total de 26 losas sin armadura transversal y 12 losas con armaduras de cortante (*stirups*). Las losas sin armadura transversal tenían dimensiones de 5m x 2.5m x 0.3m; mientras que las losas con armaduras de cortante eran de 5m x 0.3m y un ancho variable según el experimento.

Lantsoght ensayó las losas con configuraciones de carga y apoyo distintas, pero todas ellas estaban sometidas a cargas puntuales a proximidad de apoyos lineales y con suficiente ancho para asegurar que $b > b_{eff}$. Esquemáticamente, los experimentos presentados en [18] tienen la siguiente configuración:

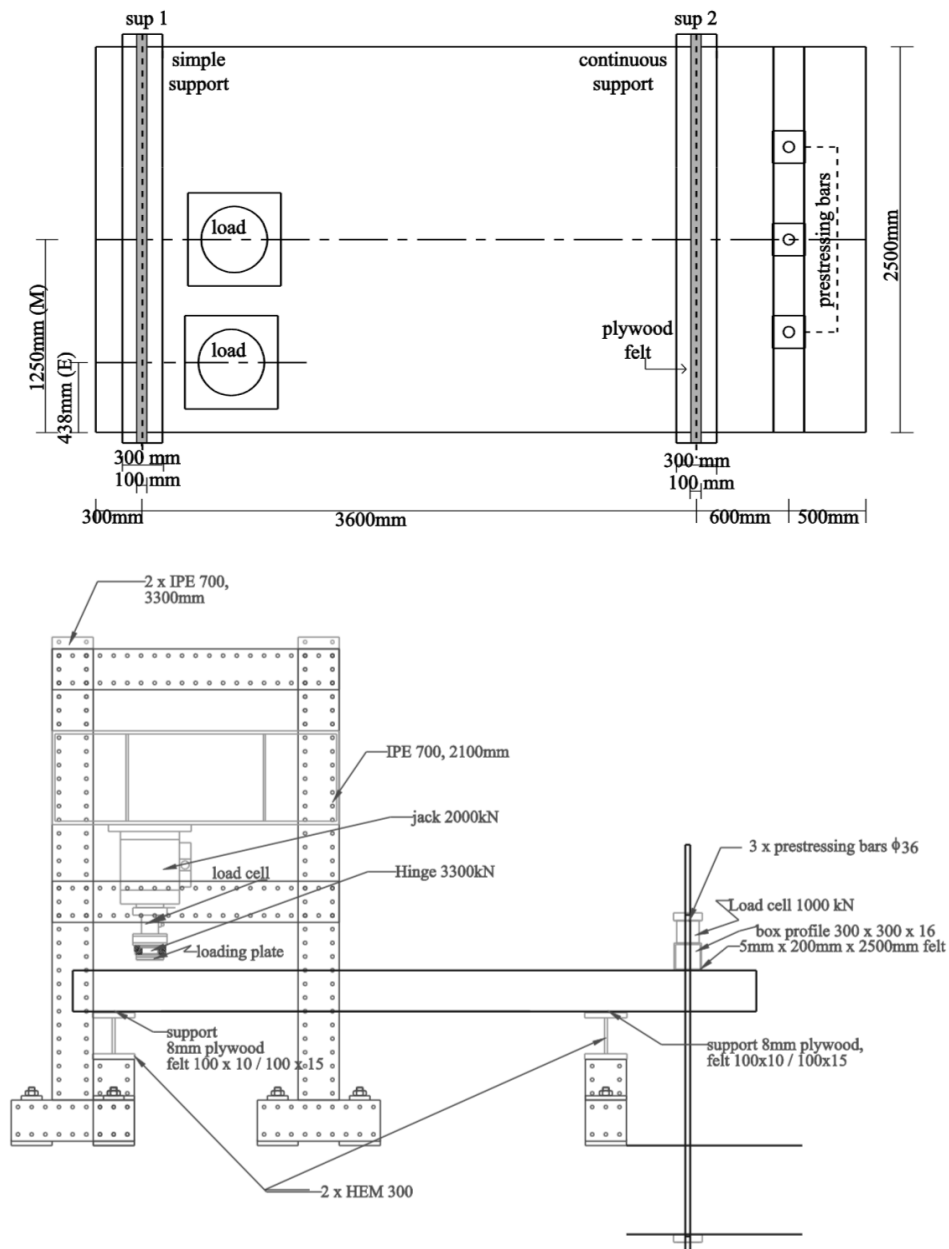


Figura 2.9: Condiciones de los ensayos realizados por Eva Lantsoght [18]

Estos ensayos le permitieron observar que los códigos de diseño subestimaban el esfuerzo cortante último que una placa puede soportar, según *Lantsoght*, debido que no consideraban correctamente la posible redistribución de esfuerzos. Asimismo, otros investigadores han puesto de manifiesto este desajuste entre las normativas y la realidad (ver §2.3.3).

Además, *Lantsoght* utilizó los experimentos realizados en [18] para probar distintas configuraciones de ensayo y estudiar que parámetros influyen a la resistencia a cortante en placas de hormigón armado sometidas a cargas puntuales. A continuación se han extraído algunas de sus conclusiones y se presentan algunos de los parámetros más importantes a considerar, pues son de especial interés para el estado del arte de la temática que estamos abordando.

2.2.1 Pre-fisuración en losas

Se han realizado muy pocos experimentos con placas o vigas pre-fisuradas con rotura por cortante. Sin embargo, con relación al engranamiento de áridos, uno de los mecanismos de resistencia al esfuerzo cortante, *Hofbeck* apunta en [22] que la existencia de zonas pre-fisuradas provoca que los áridos deslicen los unos con respecto a los otros a lo largo de todo el ciclo de carga, disminuyendo la aportación de la fricción entre áridos a la resistencia global a cortante.

Con el fin de comparar las losas con y sin pre-fisuras, se utilizaron 15 placas con las mismas características.

En términos medios, se encontró que las losas con secciones pre-fisuradas resisten un 81% de la capacidad de resistencia al cortante de las losas no fisuradas. Este valor se puede considerar sorprendentemente alto, debido que ciertas de las losas ensayadas presentaban aperturas de hasta 20mm y 30mm.

La alta resistencia residual de las losas con rotura a cortante demuestra la gran capacidad de redistribución de esfuerzos que tienen las placas sometidas a cargas puntuales cerca del apoyo.

2.2.2 Tamaño de la zona de carga

Para analizar la influencia del tamaño de la zona de carga, en primer lugar, se pueden analizar algunos de los 22 experimentos de la base de datos presentada en [18]:

Reference	Nr	a/d_l	load (mm × mm)	increase load size	P_{exp} (kN)	increase P_{exp}
Furuuchi et al. 1998	A-10-10	1.75	100 × 50	-	294	-
	A-20-10	1.75	200 × 50	100%	340	16%
	A-30-10	1.75	300 × 50	50%	450	32%
	C-10-10	1.25	100 × 50	-	480	-
	C-20-10	1.25	200 × 50	100%	525	9%
	C-30-10	1.25	300 × 50	50%	626	19%
	C-50-10	1.25	500 × 50	67%	811	30%
Regan 1982	2SS	2.16	100 × 100	-	130	-
	5SS	2.16	200 × 100	100%	190	46%
	3SS	1.68	100 × 100	-	195	-
	7SS	1.68	200 × 100	100%	200	3%

Tabla 2.1: Aumento de la carga última con respecto al aumento del tamaño de la zona de carga [18]

En la tabla anterior podemos observar que, por un lado, la carga última de la losa aumenta conforme aumentamos el ancho de la placa de carga. Por otro lado, se puede constatar que el aumento proporcional de la carga última con respecto al aumento del tamaño de la zona de carga disminuye conforme la proporción a/d_l se reduce. Es decir, para relaciones a/d_l mayores, el tamaño de la placa de carga tiene mayor influencia en el aumento de la carga última (en comparación con relaciones a/d_l menores).

Paralelamente, se analizaron los resultados de los experimentos realizados en [18] y la influencia del tamaño de la placa de carga en dichos ensayos. Más específicamente, se analizó el incremento en la carga última de rotura por cortante al pasar de una placa de carga de 200mm x 200mm a otra de 300mm x 300mm. Si dividimos las losas según su ancho, obtenemos los siguientes resultados:

Specimens	b (m)	Average increase V_u
BS1 – BS3	0.5	11.5%
BM1 – BM3	1.0	0.1%
BL1 – BL3	1.5	0.6%
BX1 – BX3	2.0	24.6%
S1 – S2	2.5	40.6%

Tabla 2.2: Aumento de la carga última con respecto al aumento del tamaño de la zona de carga en función del ancho de losa [18]

La influencia del tamaño de la zona de carga a la resistencia final se puede explicar, una vez más, gracias a la capacidad de redistribución de esfuerzos en losas de hormigón armado. Si consideramos dicha redistribución como un problema tridimensional, podemos imaginar que las bielas de compresión se propagarán desde los contornos de la zona de carga hasta la parte inferior de la losa y hacia los laterales, en profundidad y en el plano. Así pues, una losa con mayor ancho, mayor espesor o una mayor placa de carga permitirá activar una mayor zona del hormigón. A su vez, una mayor cantidad de hormigón movilizado se traduce en un incremento en la carga última que la losa podrá resistir.

2.2.3 Distancia entre la carga y el apoyo

Es comúnmente conocido que, cuando una carga se aplica cerca del punto de apoyo, se forma una biela de compresión entre el punto de carga y el apoyo. Esta transmisión de esfuerzos directa permite aumentar considerablemente la capacidad última de las vigas con respecto a la rotura por cortante. Asimismo, cuando reducimos la proporción a/d , la biela se vuelve más vertical, permitiendo el aumento de la carga última resistente. Como veremos en §2.4.1, ciertas normativas toman en consideración esta transmisión directa de esfuerzos.

No obstante, la influencia de la distancia carga-apoyo en el caso de las losas no es intuitiva y no se conoce con detalle. Por un lado, reducir la distancia carga-apoyo permite una transmisión directa de los esfuerzos y la obtención de una biela más inclinada, configuración que aumenta la resistencia última al cortante. Por otro lado, la reducción de la distancia carga-apoyo reduce la zona de redistribución de esfuerzos, pues estos recorren un menor camino hasta llegar al apoyo. La reducción de la cantidad de hormigón movilizado produce, según hemos visto a lo largo de este capítulo, una reducción de la capacidad última de la losa a cortante.

Así pues, es de vital importancia analizar el comportamiento experimental de las losas con respecto a la distancia carga-apoyo. En la siguiente tabla se presenta la influencia en la capacidad de resistencia a cortante al reducir la distancia apoyo-carga de 60cm a 40cm, para el conjunto de losas ensayadas en [18].

Specimens	b (m)	AVG $\frac{V_{exp,400}}{V_{exp,600}}$	standard deviation	coefficient of variation	expected $\frac{V_{exp,400}}{V_{exp,600}}$
BS2 – BS3	0.5	2.09	0.297	14.2%	1.8
BM2 – BM3	1	1.73	0.027	1.6%	1.8
BL2 – BL3	1.5	1.49	0.061	4.1%	1.8
BX2 – BX3	2	1.30	0.063	4.8%	1.8
S3 – S6	2.5	1.42	0.172	12.1%	2
S11 – S14	2.5	1.45	0.213	14.7%	1.8
S15 – S18	2.5	1.39	0.145	10.4%	2.25 // 1.41

Tabla 2.3: Comparación de las cargas últimas entre dos distancias apoyo-carga: 60cm y 40cm [18]

Se puede observar un claro aumento de la resistencia a cortante con la reducción de la distancia entre la carga y el apoyo. Además, se puede constatar que hay una influencia importante del ancho de la losa en dicho aumento. Tal y como hemos previsto anteriormente, un mayor ancho permite una mayor zona de redistribución de cargas, reduciendo así la diferencia entre el caso $a = 40\text{cm}$ y $a = 60\text{cm}$.

Muttoni propone en [23] una explicación mecánica a dicho fenómeno: para distancias carga-apoyo pequeñas, la biela de compresión que se forma entre la carga y el apoyo es más vertical y, por consiguiente, se ve menos afectada por el desarrollo de fisuras inclinadas. Para distancias carga-apoyo mayores, la biela de compresión está más inclinada y, por consiguiente, las fisuras de flexión que se forman pueden interactuar con la biela, reduciendo la capacidad a cortante. Esta explicación queda ilustrada en la siguiente figura:

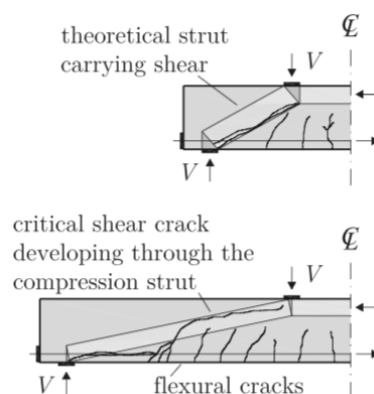


Figura 2.10: Comparación de modos de rotura entre una losa con pequeña distancia carga-apoyo (arriba) y otra con mayor distancia carga-apoyo (abajo) [23]

Por último, en la última columna de la tabla 2.3 se puede observar la misma comparación realizada con los valores analíticos que proporciona el *Eurocódigo* (EN-1992-1-1) [24]. Como se puede notar, la normativa no considera de forma completa los distintos anchos de las losas. En otras palabras, no considera en toda su complejidad la posibilidad de redistribución de esfuerzos que, experimentalmente, se ha podido observar.

2.2.4 Conclusiones

En este apartado hemos podido observar qué particularidades presenta la rotura por cortante en placas sometidas a cargas puntuales cerca de sus apoyos. Principalmente, se ha enunciado que la diferencia principal entre las vigas y las losas radica en la posibilidad que tienen estas últimas por redistribuir los esfuerzos de cortante, permitiendo aumentar la capacidad última. Además, es importante notar que esta redistribución que hemos supuesto desde un punto de vista “conceptual” se puede observar como *output* de los experimentos:



Figura 2.11: Diferencia entre los patrones de fisura por cortante de una viga (izquierda) y de una losa (derecha). Las imágenes corresponden a la parte inferior de la estructuras y las líneas negras representan las fisuras en el hormigón [18]

Asimismo, hemos podido estudiar tres parámetros que afectan a la rotura por cortante en losas: pre-fisuración, tamaño de la zona de carga y distancia carga-apoyo. Para estos parámetros se ha valorado cualitativamente y cuantitativamente su impacto, explicando físicamente los resultados obtenidos.

También hemos introducido algunas de las limitaciones que presentan las normativas en relación al cálculo del esfuerzo cortante último en losas. Si bien lo analizaremos con detalle en §2.3.3, *Lantsoght* anuncia en [18] que existe, debido a las diferencias entre normativas, una gran diferencia en la capacidad última a esfuerzo cortante de diseño según el país. Para los ensayos realizados, desde un punto de vista teórico/normativo, el incremento en la capacidad última de las losas con respecto a las vigas es de un 2% para la formulación Holandesa y de un 30% para la formulación Francesa. Experimentalmente, se observa un 25% de incremento de la carga última.

Estas discrepancias para adaptaciones de un mismo código (*Eurocódigo*) ponen de manifiesto la importancia del concepto ancho efectivo (b_{eff}) y de la repartición de esfuerzos, así como su superficial compresión y caracterización.

Finalmente, hemos podido observar que, en líneas generales, una losa con mayor ancho permite una mayor repartición de los esfuerzos y, con ello, un aumento de la resistencia a cortante. Esta relación de causalidad tiene dos características fundamentales:

- Relación lineal entre carga última y ancho de la losa
- Límite superior del comportamiento

En otras palabras, la capacidad de resistencia a cortante aumenta de la mano y de forma constante con el ancho real de la losa. Sin embargo, a partir de un determinado ancho de losa, la capacidad última a cortante no presenta un aumento. Esto se explica debido a que, para losas muy anchas, los esfuerzos no llegan a redistribuirse a lo largo de todo el ancho disponible y la resistencia no se ve aumentada. Este comportamiento está muy bien ilustrado en el siguiente gráfico:

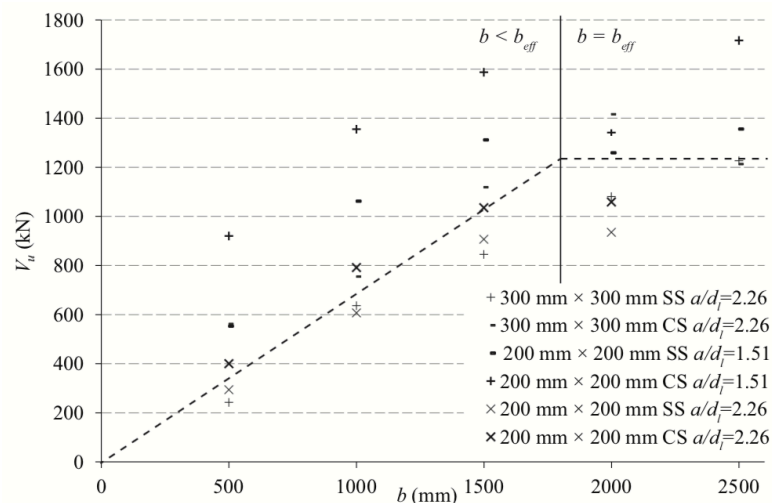


Figura 2.12: Influencia del ancho total de la losa en la capacidad de resistencia a cortante [18]

2.3 NORMATIVA Y ESFUERZO CORTANTE

En la actualidad, para poder realizar el dimensionamiento de estructuras sometidas a esfuerzo cortante y calcular su carga última se debe recurrir a las normativas que prevalecen según el país. Cada una de las normativas se adapta a la realidad del país, a la comprensión local de las estructuras y a una serie de prácticas históricas en el mundo de la construcción.

Tal y como hemos podido constatar previamente, la comprensión en toda su complejidad de los fenómenos físicos que suceden en las estructuras no es trivial. Es por ello que la mayoría de normativas basan sus formulaciones en enfoques empíricos o semi-empíricos. Así pues, las formulaciones tienen el objetivo de ajustar el comportamiento de las estructuras a una serie suficientemente representativa (a priori) de ensayos realizados en laboratorio.

A lo largo de este capítulo analizaremos si estas formulaciones empíricas se adaptan correctamente al caso de las losas y cuantificaremos hasta que punto lo hacen.

Para poder comparar varias normativas, presentaremos dos de las principales normativas de referencia: la norma EN-1992-1-1 (*Eurocódigo 2*) [24] y la norma *ACI 318M-14* [25].

2.3.1 EN 1992-1-1: Normas generales y normas para edificación

Para la verificación de una estructura al esfuerzo cortante el *Eurocódigo* define las siguientes variables:

- V_{Ed} : esfuerzo cortante aplicado [N]
- $V_{Rd,c}$: esfuerzo cortante resistente de cálculo, en ausencia de armaduras transversales [N]
- $V_{Rd,s}$: esfuerzo cortante de cálculo que puede resistir las armaduras de esfuerzo cortante (armaduras transversales) trabajando a su límite elástico [N]
- $V_{Rd,max}$: esfuerzo cortante máximo que puede resistir el elemento, antes de que las bielas se rompan a compresión [N]
- V_{ccd} : esfuerzo cortante que resiste la zona comprimida del elemento [N]
- V_{td} : esfuerzo cortante que resiste la armadura que se encuentra traccionada (armadura longitudinal) [N]

Así pues, la normativa define que la resistencia a cortante de un elemento que contiene armaduras de esfuerzo cortante se puede escribir como:

$$V_{Rd} = V_{Rd,s} + V_{ccd} + V_{td} \quad (2.1)$$

Es interesante indicar que, de los cuatro mecanismos resistentes al esfuerzo cortante enunciados en §2.1, el *Eurocódigo* no considera, desde un punto de vista teórico, la aportación de la fricción entre áridos y de la resistencia residual en la fisura.

El *Eurocódigo* diferencia dos configuraciones de cálculo posibles para verificar la resistencia de una estructura al esfuerzo cortante:

- $V_{Ed} > V_{Rd,c}$: se necesitan armaduras de esfuerzo cortante suficientes para asegurar que $V_{Ed} \leq V_{Rd,c}$
- $V_{Ed} < V_{Rd,c}$: no se necesitan armaduras de esfuerzo cortante

A continuación veremos las formulaciones que propone el *Eurocódigo* para las dos configuraciones posibles, así como algunas consideraciones relacionadas con la distancia carga-apoyo y con el ancho efectivo.

Elementos que no necesitan armaduras de esfuerzo cortante ($V_{Ed} < V_{Rd,c}$)

Para estos elementos, el esfuerzo cortante resistente, $V_{Rd,c}$, viene dado por la siguiente expresión:

$$V_{Rd,c} = \max \left\{ \begin{array}{l} [C_{Rd,c} \cdot k \cdot (100\rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} + k_1 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d \\ [v_{min} + k_1 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Donde:

- f_{ck} : resistencia característica del hormigón a compresión [MPa]
- $k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2.0$: siendo “d” la distancia entre la fibra superior y el centro de gravedad de las armaduras longitudinales inferiores [mm]
- $\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w \cdot d} \leq 0.02$
- A_{sl} : área de la sección de armaduras en tracción (longitudinales), prolongadas hasta una longitud $\geq (l_{bd} + d)$ a partir de la sección considerada

- b_w : el menor ancho de la sección recta en la zona de tracciones [mm]
- $\sigma_{cp} = N_{Ed}/A_c < 0.2f_{cd}$ [MPa]
- N_{Ed} : esfuerzo normal aplicado en la sección debido a cargas externas o a esfuerzos de pretensado [N], considerando $N_{Ed} > 0$ para la compresión
- A_c : área de la sección de hormigón [m²]

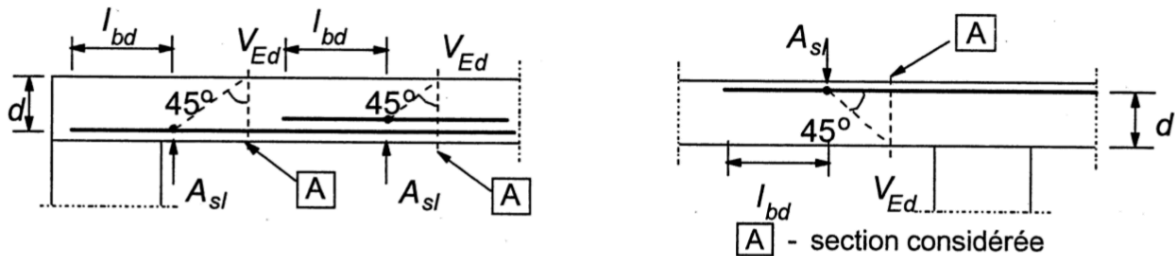


Figura 2.13: Definición de A_{sl} en la expresión de $V_{Rd,c}$ [24]

Cabe indicar que los valores de $C_{Rd,c}$, v_{min} y k_1 dependen del país de aplicación y sus valores están estipulados en el anejo nacional de prescripciones. Para el caso francés, *l'Annexe Nationale Français* estipula que $C_{Rd,c} = 0.18/\gamma_c$ y $k_1 = 0.15$ (γ_c : coeficiente seguridad). Asimismo, el valor de v_{min} presenta dos expresiones en [24], según se considere o no la redistribución transversal de esfuerzos en el caso de losas:

$$v_{min} = \begin{cases} 0.035 \cdot k^{3/2} \cdot f_{ck}^{1/2} & \text{Caso de estudio clásico} \\ 0.23 \cdot f_{ck}^{1/2} & \text{Losas con capacidad de redistribución de esfuerzos} \end{cases} \quad (2.3)$$

Elementos que necesitan armaduras de esfuerzo cortante ($V_{Ed} > V_{Rd,c}$)

El cálculo de los elementos que contienen armaduras de esfuerzo cortante está basado en un modelo de bielas y tirantes representado en la siguiente imagen:

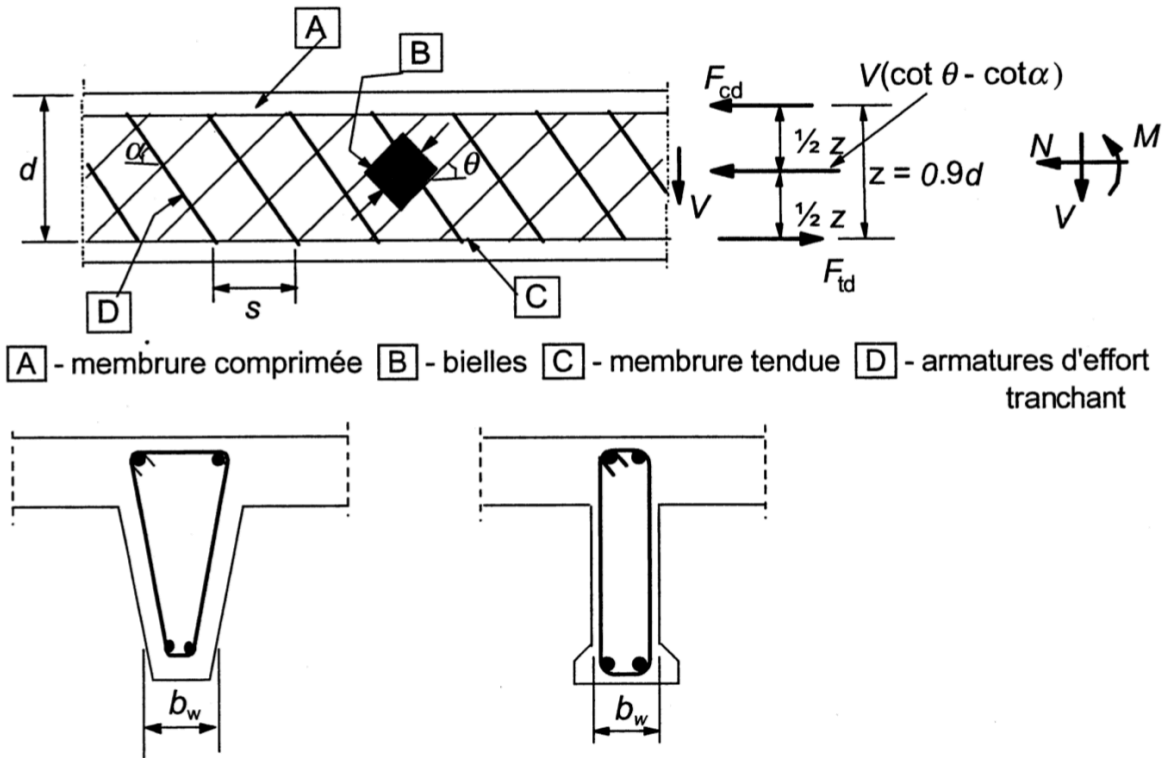


Figura 2.14: Modelo de bielas y tirantes para el caso de elementos que contienen armaduras de esfuerzo cortante [24]

De la figura anterior, se identifican los siguientes parámetros:

- α : ángulo entre las armaduras de esfuerzo cortante y la fibra neutra de la estructura
- θ : ángulo entre las bielas de compresión y la fibra neutra de la estructura
- F_{td} : valor de la tracción en las armaduras longitudinales inferiores
- F_{cd} : valor de las compresiones en el hormigón, en la dirección longitudinal del elemento
- b_w : el ancho menor del elemento de entre la zona comprimida y la zona traccionada

En primer lugar, para calcular el esfuerzo total que puede soportar la estructura se debe determinar el ángulo θ , teniendo en consideración que se debe verificar:

$$1 \leq \cot \theta \leq 2.5 \quad (2.5)$$

A continuación, una vez escogido el ángulo de inclinación de las bielas, se puede calcular el esfuerzo máximo que puede resistir la estructura a cortante mediante:

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} \cdot b_w \cdot z \cdot v_1 \cdot f_{cd} / (\cot \theta + \tan \theta) \quad (2.6)$$

NOTA: los valores de α_{cw} y v_1 se pueden encontrar en [24].

Una vez obtenido $V_{Rd,max}$, se verifica que es inferior a V_{Ed} . En caso negativo, se vuelve a escoger un valor para la inclinación teórica de las bielas de compresión y se re-comienza el proceso. Finalmente, podemos calcular la cantidad de armaduras transversales necesarias aislando A_{sw} de la siguiente expresión:

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot z \cdot f_{ywd} \cdot \cot\theta \quad (2.7)$$

Donde:

- A_{sw} : área de la sección de armaduras a esfuerzo cortante [m^2]
- s : espaciamiento entre los cuadros de armaduras transversales [m]
- f_{ywd} : límite elástico de las armaduras [MPa]

De forma esquemática, podemos resumir el proceso de verificación de una estructura al esfuerzo cortante con el logigrama siguiente:

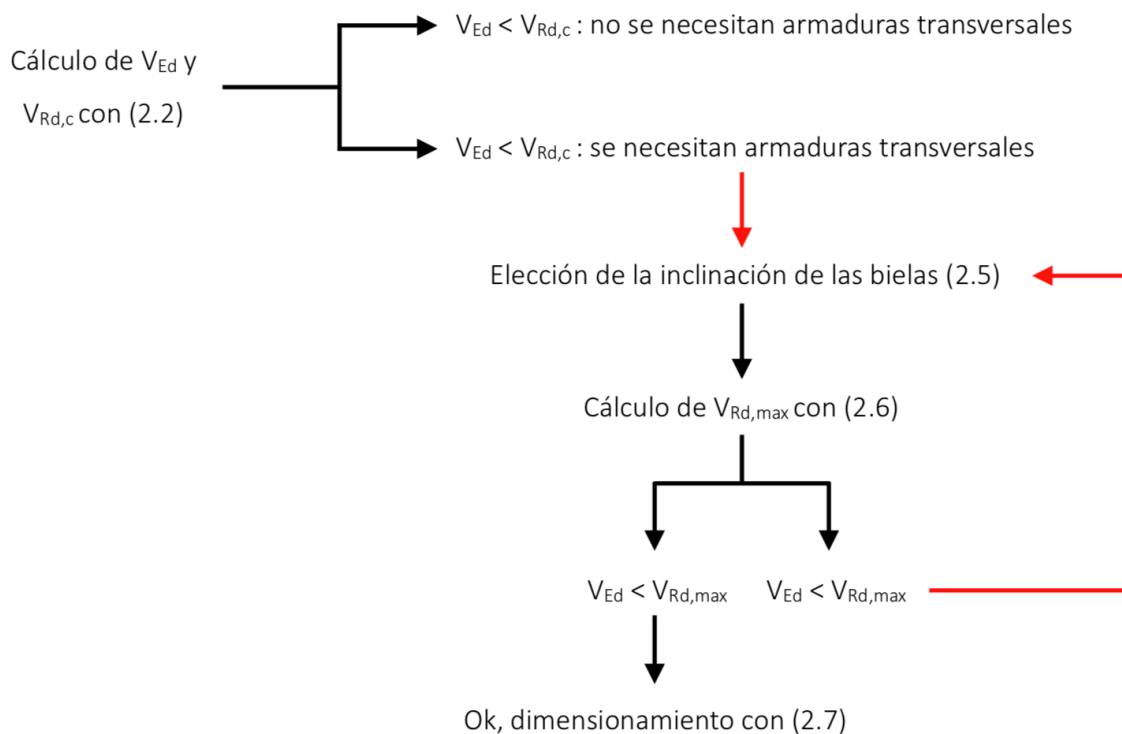


Figura 2.15: Logigrama para la verificación a cortante

Debido que este trabajo de fin de master se enmarca en un contexto experimental y no de diseño, se utilizará la fórmula (2.2) para el cálculo teórico de la capacidad última a cortante. Asimismo, se utilizará la expresión (2.4) para estudiar la consideración de la repartición transversal de esfuerzos que realiza el Eurocódigo.

Consideraciones por proximidad carga-apoyo (a_v)

El *Eurocódigo* considera la posibilidad de la transmisión directa de esfuerzos entre la carga y el apoyo. Este fenómeno, estudiado en §2.2, se tiene en consideración cuando la distancia entre la parte interior del apoyo y la parte exterior de la carga (a_v) cumplen:

$$0.5d \leq a_v \leq 2.5d \quad (2.8)$$

Gráficamente:

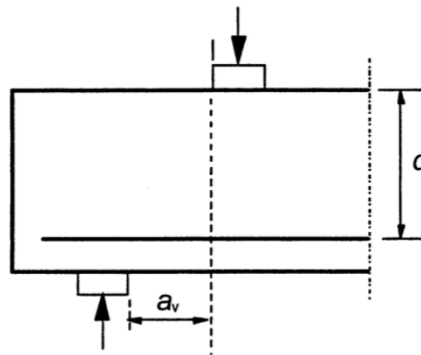


Figura 2.16: Cargas aplicadas a proximidad de los apoyos [24]

Si la estructura se encuentra en la configuración descrita por (2.8), el esfuerzo cortante actuante con el que verificamos la resistencia (V_{Ed}) se puede reducir de un factor $\beta = a_v/2d$.

Consideraciones con relación al ancho del elemento de cálculo (b_w o b_{eff})

Tal y como se ha introducido en §2.2, el ancho efectivo en el que consideramos que se puede repartir el esfuerzo cortante es un parámetro que depende del país y de sus anejos nacionales. Debido que es un parámetro que afecta enormemente al cálculo del esfuerzo resistente a cortante, es de especial interés introducir algunas de las prácticas a nivel europeo. En esta sección introduciremos las proposiciones que hacen Holanda, Francia y Alemania en sus anejos nacionales; pues después se usarán en el capítulo §2.4.3 para ilustrar las comparaciones entre las normativas y ciertos ensayos que se han encontrado en la literatura.

El anejo del *Eurocódigo* holandés propone una repartición desde el centro de la carga hacia los apoyos con un ángulo de difusión de 45°. Gráficamente:

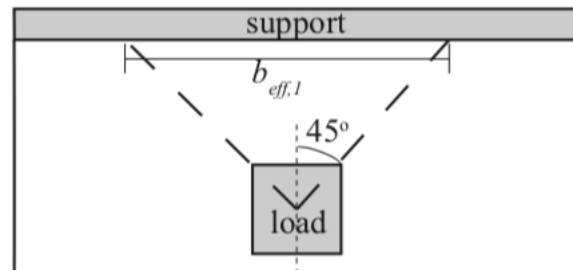


Figura 2.17: Repartición transversal y ancho efectivo propuesto por el anejo nacional holandés del Eurocódigo [18]

Cabe notar que, para la repartición definida en la normativa holandesa, el tamaño de la zona de carga no tiene ninguna influencia. No obstante, es importante recordar que en §2.2 se había observado una clara influencia de dicho parámetro a la resistencia a cortante.

El *Annexe Nationale Français* propone una repartición desde los extremos alejados de la placa de carga hacia los apoyos, con un ángulo de difusión de 45°. Así pues, a diferencia de la normativa holandesa, este modelo considera el tamaño de la zona de carga en el cálculo del ancho efectivo. Gráficamente:

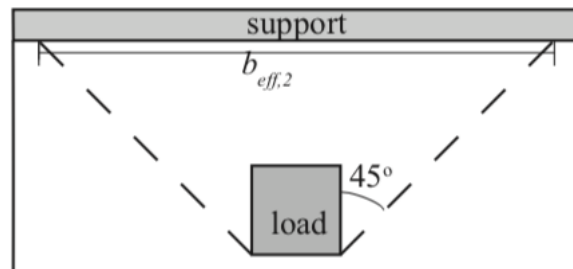


Figura 2.18: Repartición transversal y ancho efectivo propuesto por el anejo nacional francés del Eurocódigo [21]

Por último, el anejo nacional alemán [26] define el ancho efectivo según las fórmulas siguientes:

$$b_{eff} = t_y + 0.5 \cdot a \quad (2.9)$$

$$t_y = b_o + 2h_1 + h \quad (2.10)$$

Donde b_o es el ancho de la placa de carga, h es el espesor de la capa de hormigón y h_1 el espesor de la capa de cobertura. Los otros parámetros quedan definidos en la siguiente figura:

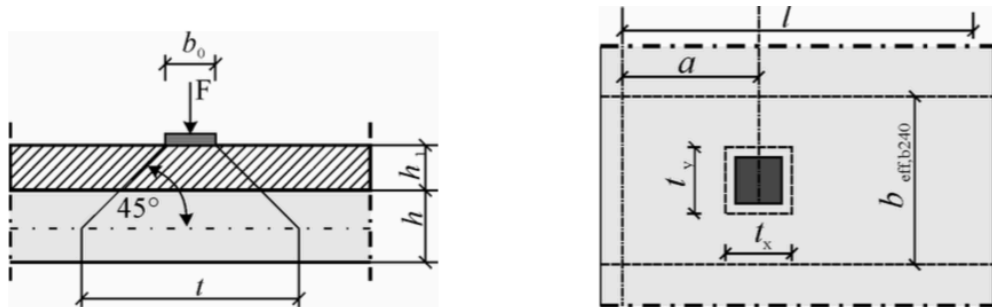


Figura 2.19: Repartición transversal y ancho efectivo propuesto por el anejo nacional alemán del Eurocódigo [26]

Conclusiones

La formulación propuesta por el *Eurocódigo 2* en [24] es el resultado de una extensa campaña de experimentos y ensayos, dando lugar a una formulación empírica o semi-empírica. Con relación a la problemática que nos ocupa, el de las losas con rotura por cortante sometidas a cargas puntuales y a tracciones en su plano, podemos extraer las siguientes conclusiones de la formulación propuesta por el *Eurocódigo*:

- Posibilidad de considerar un esfuerzo normal en el plano, por medio del término σ_{cp} en (2.2)
- Consideración del efecto del tamaño
- Consideración de la redistribución transversal, pero aplicación muy diversa en función del país
- Consideración de la transmisión directa de esfuerzos en función de la distancia carga-apoyo

2.3.2 ACI 318M-14: Building code requirements for structural concrete

Para la verificación de una estructura al esfuerzo cortante el *ACI Standard* define, en la sección §22.5 de [25], las siguientes variables:

- V_n : esfuerzo cortante nominal o último [N]
- V_c : esfuerzo cortante nominal o último que proviene del hormigón [N]
- V_s : esfuerzo cortante nominal o último que proviene de las armaduras de esfuerzo cortante [N]

Así pues, la normativa define que la resistencia a cortante de un elemento que contiene armaduras de esfuerzo cortante se puede escribir como:

$$V_n = V_c + V_s \quad (2.11)$$

Donde V_s se puede considerar nula si no tenemos armaduras de esfuerzo cortante (nuestro caso de estudio).

Cabe indicar que, una vez se ha realizado la primera fisura, la normativa asocia la resistencia a cortante del hormigón, V_c , a las contribuciones de la cabeza de compresión, el efecto pasador y el engranamiento entre áridos.

Las formulaciones que presenta la normativa americana varían de forma importante en función del tipo de elemento. Así pues, tenemos formulaciones para elementos no-pretensados y sin esfuerzo axial, para elementos no-pretensados pero con esfuerzo axial, para elementos pretensados, etc. Nos concentraremos en las formulaciones propuestas para elementos no-pretensados pero sometidos a un esfuerzo axial “importante”.

Las formulas a utilizar varían en función de si consideramos esfuerzos de compresión o de tracción:

Compresión:
$$V_c = 0.17 \left(1 + \frac{N_u}{14A_g} \right) \lambda \sqrt{f'_c} \cdot b_w d \quad (2.12)$$

Tracción:
$$V_c = 0.17 \left(1 + \frac{N_u}{3.5A_g} \right) \lambda \sqrt{f'_c} \cdot b_w d \quad (2.13)$$

Donde:

- N_u : esfuerzo axial, positivo para compresiones [N]
- A_g : área de hormigón de la sección de estudio [mm²]
- λ : coeficiente de corrección para la reducción de propiedades mecánicas de un hormigón de bajo peso con respecto a un hormigón estándar ($\lambda = 1$ en nuestro caso)
- f'_c : resistencia característica del hormigón (f_{ck} en [24]) [MPa]
- b_w : ancho del alma [mm]
- d : distancia entre la fibra superior y el centro de gravedad de las armaduras longitudinales inferiores [mm]

La formulación para el caso de esfuerzos axiales de compresión puede variar en función de la relación N_u/A_g . En la sección §22.5.6.1 de [25] se estipula:

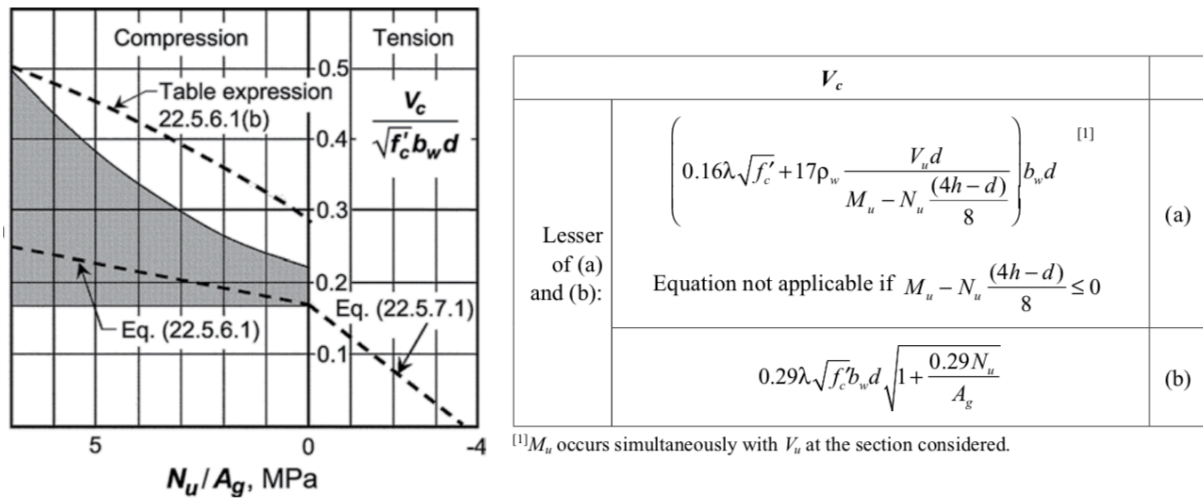


Figura 2.20: Formulación a utilizar para el cálculo de V_c según ACI 318M-14 [25]

Se puede constatar en la imagen anterior que la normativa propone una única fórmula para el caso de esfuerzos de tracción en el plano. Así pues, se utilizará la fórmula (2.13) para futuras comparaciones entre las modelizaciones y esta normativa.

Conclusiones

La formulación propuesta por el ACI 318M-14 en [25] es el resultado de una extensa campaña de experimentos y ensayos, dando lugar a una formulación puramente empírica. Con relación a la problemática que nos ocupa, el de las losas con rotura por cortante sometidas a cargas puntuales y a tracciones en su plano, podemos extraer las siguientes conclusiones de la formulación propuesta en [25]:

- Posibilidad de considerar un esfuerzo normal en el plano, por medio del término N_u en (2.13)
- No consideración del efecto del tamaño
- No consideración de la redistribución transversal (b_w constante)

2.3.3 Comparación entre las normativas y la realidad

Hemos podido comprobar que las dos normativas introducidas, *Eurocódigo 2* y *ACI 318*, presentan expresiones que se determinaron de forma empírica gracias a una importante base de datos con ensayos realizados en todo el mundo. No obstante, la mayoría de expresiones se obtuvieron a partir de ensayos en vigas fuertemente armadas, simplemente apoyadas en sus extremos y ensayadas con dos puntos de carga. La extensiva revisión de la literatura realizada por *Rombach y Kohl* en [27], pone de manifiesto que la base de datos utilizada para definir la expresión del esfuerzo cortante para el *Eurocódigo 2* presenta una gran variancia en cuanto a los resultados, hecho que propicia la necesaria aplicación de coeficientes de seguridad importantes en la formulación resultante. Asimismo, varios autores ponen de manifiesto que el uso de vigas para caracterizar el comportamiento de rotura a cortante en losas penaliza extremadamente el dimensionamiento de estas últimas.

Este capítulo tiene por objetivo de enunciar algunos de estos estudios y de cuantificar la diferencia que presenta la normativa con respecto a los ensayos realizados en losas.

Tal y como se ha indicado en §2.2, uno de los conceptos fundamentales del esfuerzo cortante en losas es el ancho efectivo por el que se reparte este esfuerzo. Experimentalmente, *Lantsoght* observó en [18] un decalaje importante entre el ancho efectivo extrapolado de la serie experimental y los distintos anchos efectivos propuestos por los códigos de diseño. La autora comparó el ancho experimental (b_{meas}) con el ancho teórico propuesto por la normativa Holandesa (b_{eff1})[18], Francesa (b_{eff2})[21], Alemana (b_{DE})[26] y el *Model Code* (b_{MC})[28]. Los resultados se pueden observar en la siguiente tabla:

Series	b_{meas} (m)	b_{eff1} (m)	b_{eff2} (m)	b_{MC} (m)	b_{DE} (m)
300 mm × 300 mm, SS, $a/d_l = 2.26$	2.04	1.1	1.7	0.99	0.87
300 mm × 300 mm, CS, $a/d_l = 2.26$	1.78	1.1	1.7	0.99	-
200 mm × 200 mm, SS, $a/d_l = 1.51$	1.31	0.7	1.1	0.63	0.67
200 mm × 200 mm, CS, $a/d_l = 1.51$	0.94	0.7	1.1	0.63	-
200 mm × 200 mm, SS, $a/d_l = 2.26$	1.53	1.1	1.5	0.98	0.77
200 mm × 200 mm, CS, $a/d_l = 2.26$	1.31	1.1	1.5	0.98	-

Tabla 2.4: Anchos efectivos experimentales y teóricos para distintos códigos [18]

En primer lugar, podemos observar un claro decalaje entre el resultado experimental y la multitud de posibles soluciones propuestas por las distintas normativas. En segundo lugar, se puede constatar que el *Annexe Nationale Française* [24] es el que nos da una mejor aproximación, pues de media presenta un decalaje de 0.055m con respecto a los datos experimentales; mientras que el *Model Code* [28] presenta un 0.615m y el anejo nacional alemán presenta un 0.76m. Además, la normativa francesa propone la aproximación con menor desviación estándar con respecto a los datos experimentales. Finalmente, podemos constatar que, por norma general, las normativas proponen valores muy conservativos.

Lantsoght no es la única autora que ha puesto de manifiesto esta diferencia entre la realidad y los códigos de diseño. *Reissen y Hegger* [29] realizaron una serie de ensayos en la RWTH Aachen University y obtuvieron conclusiones similares a las de *Lantsoght*. Más específicamente, se ensayaron 13 losas con características similares y con condiciones de apoyo y carga similares a las presentadas en [18], sin esfuerzos de tracción en el plano. Los autores rompieron la totalidad de las losas a cortante, mediante dos zonas de carga (1T y 2T). Los resultados que obtuvieron se presentan en la siguiente figura:

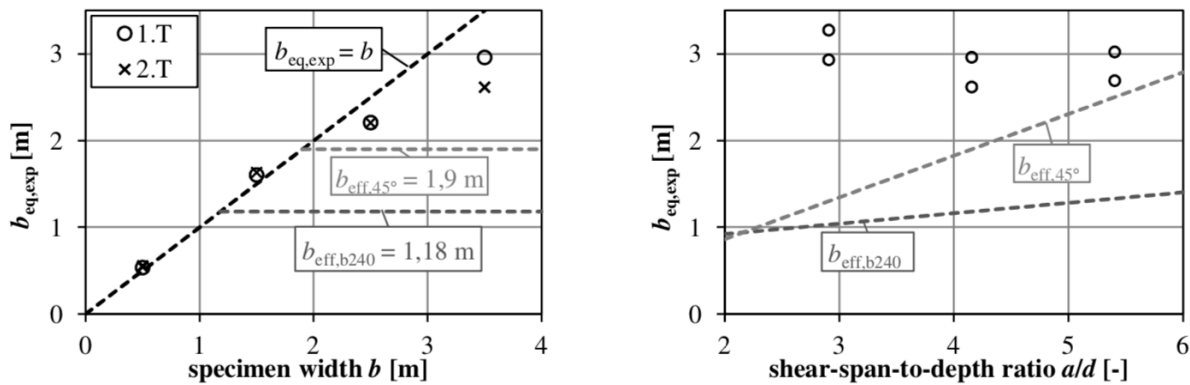


Figura 2.21: Comparación entre anchos efectivos experimentales y teóricos. Derecha: para los distintos anchos de losa, con $a/d=4,16$. Izquierda: para las distintas relaciones a/d , con una losa de 3,5m de ancho [29]

De nuevo, se puede observar que las normativas no capturan adecuadamente la complejidad del problema y que proponen valores muy conservativos para determinadas configuraciones.

Otra comparación posible para evaluar la discrepancia entre la realidad y los códigos de cálculo es con respecto al esfuerzo cortante resistente. *Lantsoght* compara en [18] el cortante a rotura obtenido experimentalmente (V_{DUTexp}) con los valores propuestos por el *Eurocódigo* según la fórmula (2.2), considerando $N_{Ed} = 0$ y los valores de b_w propuestos en los anejos nacionales holandés ($V_{EC,eff1}$) y francés ($V_{EC,eff2}$). Asimismo, incluye una comparación con la base de datos presentada en el mismo trabajo.

	$\frac{V_{DUTexp}}{V_{EC,eff1}}$	$\frac{V_{DUTexp}}{V_{EC,eff2}}$	$\frac{V_{DUTdb}}{V_{EC,eff1}}$	$\frac{V_{DUTdb}}{V_{EC,eff2}}$
AVG	3.401	2.382	1.937	1.570
STD	0.890	0.522	1.228	0.659
COV	26%	22%	63%	42%

Tabla 2.5: Comparación entre el Eurocódigo y los valores experimentales [18]

Como hemos enunciado anteriormente, se puede observar que el *Eurocódigo* subestima la capacidad de resistencia a cortante, tanto para vigas como para losas. Sin embargo, se puede observar que la diferencia es mucho más importante para el caso de placas (valor $V_{DUTexp}/V_{EC,eff}$). Asimismo, podemos confirmar la gran variabilidad de la base de datos si observamos los valores de covarianza. Por otro lado, se confirma que la normativa francesa predice mejor el ancho efectivo que la holandesa.

Si bien los estudios de *Lantsoght* [18] y de *Reissen - Hegger* [29] se realizaron con losas rectangulares, apoyos lineales en sus extremos y con la zona de carga entre los apoyos; otros autores se han interesado a losas con geometrías y configuraciones de carga más parecidas a las utilizadas en múltiples puentes. *Latte* en [30], *Rodrigues* en [31] y *Jaeger* en [32] concibieron ensayos que tenían por objetivo simular las cargas de tráfico que se generan en las losas de los puentes: cargas puntuales, en la zona suspendida de la losa. Un ejemplo de dicha configuración se puede observar en la siguiente imagen, extraída de los experimentos realizados por *Rodrigues* o por *Latte*:

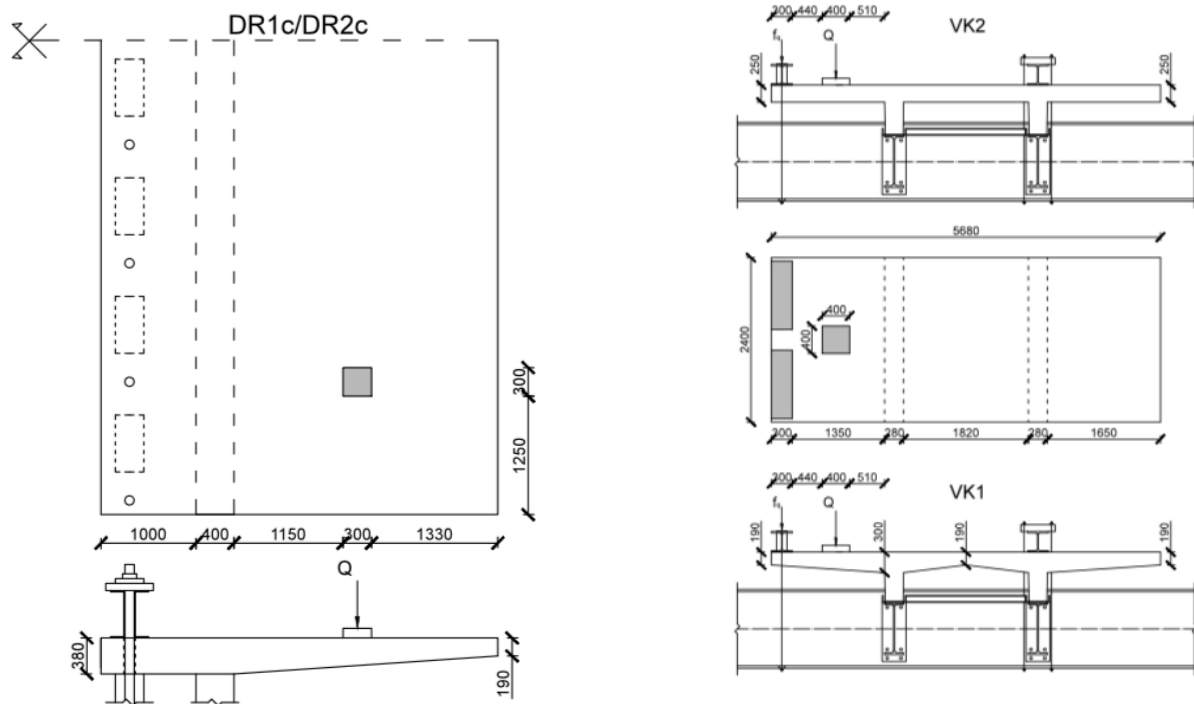


Figura 2.22: Esquematización de los experimentos de Rodrigues (izquierda) y Latte (derecha) [3]

Estos experimentos permiten evaluar si las discrepancias entre las normativas y la realidad se siguen observando en losas de puentes. Además de permitir estudiar la influencia de la redistribución transversal de esfuerzos, el tamaño de la zona de carga... estos ensayos permiten, a diferencia de los realizados en losas, estudiar el efecto del tamaño.

Para analizar los resultados de estos ensayos, *R. Terras* realiza un interesante trabajo en [3] al retomar los resultados experimentales de *Latte* [30], *Rodrigues* [31] y *Jaeger* [32]; y compararlos tanto a normativas como el *EN-1992-1-1* [24], el *ACI 318* [25] o el *Model Code* [28]; como a modelos conceptuales como el *Critical Shear Crack Theory* (CSCT).

Los resultados presentados por *Terras* comparan el valor experimental con los distintos modelos de cálculo, para cada uno de los experimentos realizados en [30]-[32]:

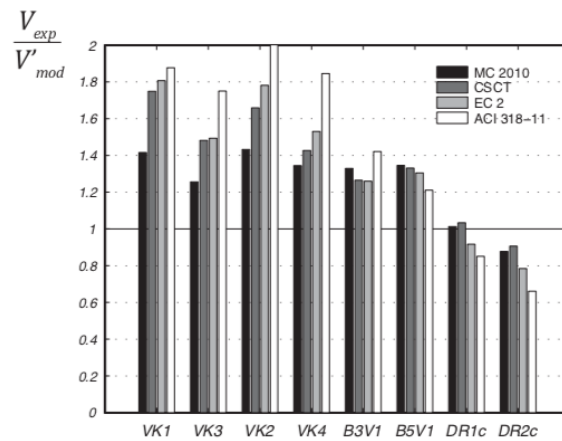


Figura 2.23: Comparación entre los resultados experimentales y las normativas o modelos de cálculo [3]

De la figura anterior podemos concluir que, incluso para losas de puentes, hay un gran decalaje entre la realidad (experimentos) y los códigos de diseño. Especialmente, podemos observar una infravaloración de la capacidad de resistencia a cortante en la normativa *ACI 318*, con estimaciones que casi duplican los valores experimentales. Cabe notar que el modelo conceptual *CSCT* proporciona, para los elementos estudiados, una mejor aproximación que el *Eurocódigo* o la *ACI*. Así pues, es interesante indicar que entender la física del problema en su complejidad nos puede proporcionar mejores prácticas de diseño y estimaciones de la realidad.

2.4 RESUMEN

En este capítulo, sobre la revisión del estado de conocimiento, se han introducido los conceptos básicos y la fenomenología que definen la rotura por cortante en losas de hormigón armado sometidas a cargas puntuales.

Se ha podido comprender cuáles son los mecanismos que contribuyen a la resistencia del esfuerzo cortante y se ha explicado cuál es su funcionamiento y su importancia en el seno de la resistencia global a cortante. Asimismo, se han introducido las particularidades que presenta el esfuerzo cortante para el caso de losas de hormigón armado. Con ese fin, se han presentado algunos parámetros que afectan la carga última a cortante en losas, como la distancia carga-apoyo, el tamaño de la zona de carga o la eventual pre-fisuración de la placa.

El análisis de la influencia de estos parámetros nos ha permitido explicar los comportamientos mecánicos que suceden en una losa, caracterizados por su capacidad de repartición transversal de esfuerzos.

A continuación, se han presentado dos códigos de cálculo (*Eurocódigo* y *ACI*) que permiten dimensionar losas de hormigón armado a esfuerzo cortante. Se han estudiado sus formulaciones y hipótesis, con el fin de identificar hasta que punto ciernen la problemática de estudio. Se ha indicado que ambos códigos presentan formulaciones empíricas, con una caracterización simplista del ancho efectivo actuante en la resistencia a cortante.

Finalmente, se ha realizado una comparación entre varios resultados experimentales obtenidos en ensayos de losas simples [18][29] y de losas de puentes [3][30][31][32], y los valores de diseño propuestos por *l'EN-1991-1-1* [24], el *ACI 318M-14* [25] y un modelo conceptual. En líneas generales, se ha concluido que las normativas de diseño y los modelos conceptuales actuales presentan un decalaje importante con respecto a los valores experimentales obtenidos en losas. Mas específicamente, las normativas infravaloran de forma severa la capacidad de resistencia a cortante en las losas de hormigón.

Este capítulo ha servido pues para sentar las bases de este trabajo y para dar una pincelada sobre la problemática. Se ha podido constatar que la transmisión del esfuerzo cortante y los mecanismos resistentes al esfuerzo son de una gran complejidad para el caso de losas de hormigón armado. Asimismo, en este capítulo se ha podido constatar que existe cierta escasez de investigaciones que hayan estudiado con detalle la problemática.

Por último, cabe destacar que ninguno de los estudios experimentales presentados en este capítulo trata la problemática de las tracciones en el plano en losas sometidas a cargas puntuales. Así pues, la continuación de esta tesina y los futuros estudios de *Pablo Gonzalo Fernández* y de *Antonio Marí* pretenden dar un atisbo de luz a una problemática que, hasta el momento, no se ha estudiado con detalle.

3 Simulación del cortante en losas con elementos finitos

El objetivo principal de este trabajo es proporcionar un soporte a las investigaciones en curso de *Antonio Marí y Pablo Gonzalo Fernández* sobre la rotura por cortante en losas sometidas a cargas puntuales y a tracciones en el plano. Parte de la investigación, tal y cómo se ha indicado previamente, pasa por realizar una serie de ensayos en laboratorio con el fin de estudiar detalladamente el comportamiento “real” de dichas estructuras.

Con el fin de apoyar la campaña experimental, este trabajo estudiará las losas que se ensayarán por medio de elementos finitos no-lineales. La aportación que se pretende dar a la campaña experimental viene definida en dos tiempos: pre-ensayo y post-ensayo.

Por un lado, las simulaciones numéricas permitirán aportar, en una fase pre-ensayo, una sucinta comprensión del futuro comportamiento de la losa de ensayo. Ya sea por medio de curvas tensión-deformación, por el análisis de la carga última de rotura o por la representación de las líneas de tensiones principales; el análisis con elementos finitos nos permitirá prever ciertos comportamientos que sucederán en los ensayos y nos permitirá establecer una base de comparación.

Por otro lado, una vez finalizada la campaña experimental, se podrá utilizar el modelo de elementos finitos presentado en este trabajo con el fin de estudiar múltiples casos de estudio y configuraciones. Retomado los datos experimentales, se podrá modificar el modelo con el fin que representa fielmente la realidad. Una vez calibrado el modelo, este podría servir de base para realizar estudios paramétricos, sin la necesidad de reproducir un experimento físico en el laboratorio.

Dado que la campaña experimental no se ha iniciado, este trabajo se centrará en la fase previa a los ensayos, descrita en el párrafo anterior.

Para realizar el modelo con elementos finitos se ha utilizado el paquete comercial ABAQUS 6.14, dado que permite una gran variedad de configuraciones geométricas y la posibilidad de asignar comportamientos no lineales a los materiales.

Este capítulo tiene el objetivo de presentar el modelo de base con el que analizaremos la rotura por cortante en losas y al que, posteriormente, le aplicaremos tracciones en el plano.

En primer lugar, se realizará una breve introducción a la formulación con elementos finitos y a los conceptos básicos que debemos considerar, desde un punto de vista teórico, para definir el modelo.

En segundo lugar, se presentarán los parámetros y hipótesis que definen el modelo. Se explicarán detalladamente los modelos constitutivos utilizados, las condiciones de apoyo, la aplicación de la carga; entre otros parámetros.

A continuación, se presentarán los resultados obtenidos con el modelo de base (sin tracciones). Asimismo, se compararán con los modelos empíricos propuestos por las normativas presentadas anteriormente y con algunos resultados experimentales citados.

Finalmente, se presentará un análisis de sensibilidad del modelo y un estudio paramétrico. Este último punto servirá de base para futuras investigaciones, en una fase previa a los experimentos en laboratorio.

3.1 INTRODUCCIÓN A LOS ELEMENTOS FINITOS

El Método de Elementos Finitos (MEF) es una herramienta numérica que permite aportar una solución aproximada a problemas con Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) aplicadas a un dominio concreto, sometido a condiciones de contorno. Este método presenta una gran versatilidad y se utiliza en múltiples problemas de ingeniería y de física. Ejemplo de ello son la resolución de problemas de fluidos con convección-difusión, problemas termo-mecánicos y poro-mecánicos o problemas de equilibrio estructural; entre otros.

El principal objetivo del MEF es poder dar una solución a las distintas EDP para una geometría cualquiera, con toda la complejidad que se pueda imaginar. Para alcanzar dicho objetivo, el MEF propone dos conceptos fundamentales:

- Transformar la EDP de forma fuerte a forma débil

Desde un punto de vista general, un problema físico viene definido por una EDP que se aplica a todo el dominio, complementada por una serie de condiciones de contorno. Para el caso de una estructura, la EDP describe el equilibrio que se debe producir entre las fuerzas exteriores aplicadas y las reacciones internas de la estructura, todo ello sometido a las condiciones de apoyo y contacto. Este conjunto constituye la *forma fuerte* del problema.

No obstante, si queremos utilizar los métodos de álgebra lineal sobre un espacio vectorial y toda su batería de soluciones y métodos asociados, debemos transformar la *forma fuerte* de la EDP. La solución pasa por pre-multiplicar la EDP por una función test (v) y integrar en todo el dominio, dando lugar a ecuaciones tratables con métodos de álgebra clásicos. Esta formulación resultante recibe el nombre de *forma débil* del problema.

- Discretización del continuo

El continuo (dominio) se divide en un número finito de partes (elementos), cuyo comportamiento global se describe en función de la “suma” de comportamientos que siguen una serie de puntos (nodos) situados en el contorno o en el interior del elemento. Así pues, tomando como ejemplo un elemento que presenta únicamente movimientos en el plano x-y (u y v), estos quedan definidos por la suma de contribuciones nodales del elemento (a_i). Matricialmente, para un elemento triangular de 3 nodos:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}_1 \quad \mathbf{N}_2 \quad \mathbf{N}_3] \cdot \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{a} \quad (3.1)$$

Donde \mathbf{N} es la matriz de funciones de forma, formulación resultante de pasar de forma a fuerte a forma débil; y \mathbf{a} es el vector de desplazamientos nodales.

Desde una perspectiva global, el equilibrio de la estructura por medio del MEF se describe gracias a la interacción entre los distintos elementos y a las interacciones de dichos elementos con las condiciones de contorno y de carga. Con el objetivo de acoplar todas las interacciones, uno de los conceptos básicos del MEF es el ensamblaje de los elementos en un sistema global.

El paso de *forma fuerte* a *forma débil* y el ensamblaje de la contribuciones de cada elemento en un sistema global, resulta en la ecuación matricial clásica usada en MEF:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.2)$$

Siendo \mathbf{K} la matriz de rigidez que relaciona la interacción entre unos elementos y otros; \mathbf{u} el vector de incógnitas, es decir, los desplazamientos; y \mathbf{f} el vector de fuerzas externas aplicadas al sistema.

Debido que ABAQUS permite la resolución de múltiples problemas físicos, propone varios métodos para solucionar las ecuaciones en *forma débil*. Ya sea una simulación estática ($\ddot{u} = 0$), una simulación dinámica ($\ddot{u} \neq 0$), una simulación cíclica... ABAQUS nos propondrá esquemas de resolución que se adapten a nuestro problema y nos pedirá, en función de estos, la definición de ciertos parámetros necesarios para su definición.

En cuanto a los problemas estructurales que nos ocupan, podemos considerarlos como fenómenos estáticos o cuasi-estáticos. No obstante, es importante indicar que la simulación de un ensayo realizado por control del desplazamiento nos introduce la variable *tiempo* en el estudio numérico. Para solucionar este tipo de problemas, ABAQUS ofrece dos tipos de esquemas: *implícito* y *explícito* [33].

Ambos esquemas de resolución se pueden utilizar para solucionar problemas cuasi-estáticos o dinámicos, presentando sus ventajas e inconvenientes. A continuación presentaremos sus características y justificaremos la elección que se ha realizado para este proyecto.

Esquema implícito

En cuanto al esquema de resolución *implícito*, el manual de uso de ABAQUS [33] nos proporciona dos informaciones de gran interés en relación con los métodos numéricos utilizados para solucionar el problema matricial y temporal.

Por un lado, cabe destacar que el método de resolución de problemas no-lineales que utiliza el motor *ABAQUS/Implicit* por defecto es el común método de *Newton-Raphson*. Consideramos que este método es adecuado para nuestro problema, debido que no

esperamos una respuesta de la estructura, en términos de fuerza-desplazamiento, con *snap-throughs* o *snap-backs*.

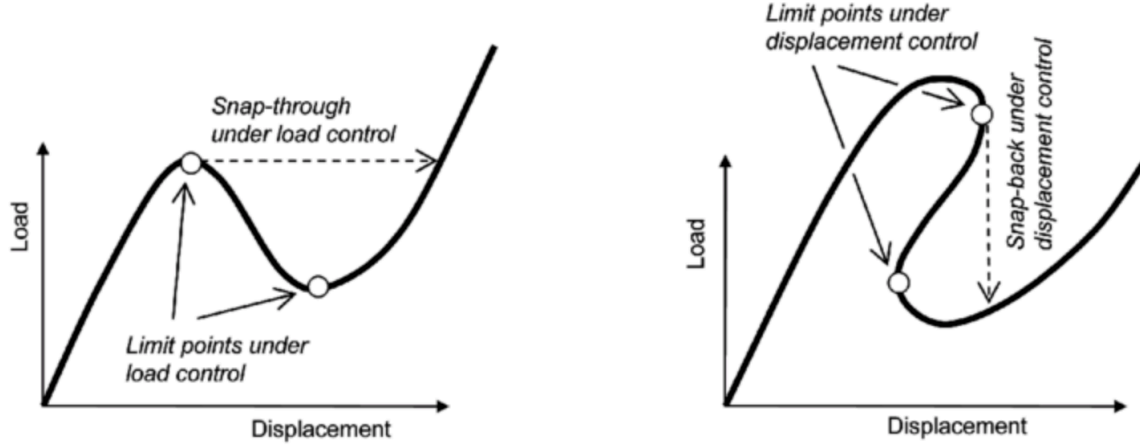


Figura 3.1: Ejemplo de “snap-through” (izquierda) y de “snap-back”(derecha) en curvas de carga-desplazamiento [34]

Asimismo, cabe destacar que el método de *Newton-Raphson* es bastante robusto y estable, además de proponer una convergencia cuadrática con respecto al tamaño de malla. No obstante, cabe indicar que estas interesantes propiedades tienen asociadas un coste computacional potencialmente elevado. De hecho, es interesante recordar que, para cada iteración, el método de *Newton-Raphson* debe generar el jacobiano de la función a solucionar, factorizarlo para evitar la inversión de la matriz y resolver el sistema lineal de ecuaciones resultante por medio de métodos algebraicos clásicos (p.ej: *Cholesky generalizado*).

Por otro lado, en cuanto al esquema de resolución temporal utilizado por el motor de cálculo *ABAQUS/Implicit*, se propone el método *backward Euler*. Este método de resolución implícito es incondicionalmente estable, motivo por el cual se pueden realizar grandes pasos en el tiempo (Δt) [35]. Así pues, el método presenta una cierta robustez y estabilidad, al igual que *Newton-Raphson*. Un esquema clásico del método *backward Euler* sería el siguiente:

$$[\bar{\mathbf{M}} - \Delta t \cdot \bar{\mathbf{K}}] \cdot \bar{\mathbf{u}}^{n+1} = \bar{\mathbf{M}} \cdot \bar{\mathbf{u}}^n + \Delta t \cdot \bar{\mathbf{f}}^{n+1} \quad (3.3)$$

con $\bar{\mathbf{A}} = [\bar{\mathbf{M}} - \Delta t \cdot \bar{\mathbf{K}}]$

De la expresión anterior, podemos observar que la matriz $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ no se puede transformar en una *lumped matrix*, pues $\bar{\bar{\mathbf{K}}}$ no es necesariamente diagonalizable. Por ese motivo, cada una de las iteraciones que realicemos en el tiempo comportará un gran coste computacional.

En conclusión, podemos indicar que el motor de cálculo *ABAQUS/Implicit* presenta métodos de resolución no-lineales y temporales robustos y estables. Sin embargo, dicha robustez se puede traducir en un alto coste computacional.

Esquema explícito

En cuanto al esquema de resolución *explícito*, el manual del usuario de ABAQUS [33] nos indica que su uso es propio de simulaciones dinámicas y que, por ello, su metodología es fundamentalmente distinta al modelo *implícito*. Debido que el motor *ABAQUS/Explicit* se usa para problemas dinámicos, incluye el efecto de las fuerzas inerciales ($\bar{\bar{\mathbf{M}}}^t \cdot \ddot{\bar{\mathbf{u}}}^t$) y de las fuerzas de amortiguación ($\bar{\bar{\mathbf{C}}}^t \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}}^t$).

Los esquemas de resolución temporal utilizados por *ABAQUS/Explicit* son bastante complejos y no se explicitan exhaustivamente todos sus componentes. Sin embargo, es interesante destacar algunos aspectos que son de nuestro interés.

Por un lado, desde un punto de vista teórico, es importante indicar que los esquemas de resolución *explícitos* son condicionalmente estables con respecto al incremental de tiempo utilizado [35]. Así pues, se debe escoger un incremento de tiempo (Δt) que asegure la estabilidad del método de resolución, en función del coste computacional deseado y del tamaño de malla que se quiera utilizar.

Asimismo, cabe destacar que el motor de cálculo *ABAQUS/Explicit* permite el uso de un incremental de tiempo (Δt) cambiante y adaptable, en función de la estabilidad del cálculo.

Por otro lado, es importante destacar que, a diferencia del caso *implícito*, cada discretización temporal no requiere de un cálculo iterativo, debido que los esquemas explícitos no verifican el equilibrio de la estructura en cada incremento de tiempo. Esto proporciona una importante reducción del coste computacional.

Además, la ecuación matricial a resolver para cada iteración también nos permite reducir el coste computacional. Observando un esquema de resolución *explícito* como *Euler method*, el sistema de ecuaciones a resolver en cada iteración es del estilo:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\mathbf{M}}} \cdot \bar{\mathbf{u}}^{n+1} &= \bar{\bar{\mathbf{M}}} \cdot \bar{\mathbf{u}}^n + \Delta t \cdot [\bar{\bar{\mathbf{K}}} \cdot \bar{\mathbf{u}}^n + \bar{\mathbf{f}}^n] \\ \text{con } \bar{\bar{\mathbf{A}}} &= \bar{\bar{\mathbf{M}}}\end{aligned}\tag{3.4}$$

A diferencia del caso implícito, la matriz $\bar{\bar{\mathbf{A}}}$ se puede transformar en una *lumped matrix*, reduciendo el coste computacional de cada iteración.

En conclusión, podemos indicar que el motor de cálculo *ABAQUS/Explicit* presenta métodos de resolución con un bajo coste computacional y adaptables en el tiempo. Sin embargo, la mala caracterización del modelo de cálculo puede generar problemas de estabilidad.

Conclusiones

Tal y como se ha estudiado a lo largo de este apartado, los esquemas de resolución *implícitos* y *explícitos* presentan, respectivamente, ciertas ventajas e inconvenientes. Por un lado, los esquemas *implícitos* proponen una formulación robusta y estable, ideal para solucionar problemas estáticos o cuasi-estáticos. Sin embargo, esta robustez es en detrimento de un alto coste computacional. Por otro lado, los esquemas *explícitos* proponen métodos de resolución más “ligeros” y adaptables, con menor coste computacional; ideales para problemas dinámicos. No obstante, pueden presentar eventuales inestabilidades a lo largo de su resolución temporal.

Los esquemas *explícitos* pueden ser apropiados para estudiar simulaciones cuasi-estáticas, siempre en cuanto se tengan ciertas consideraciones. En ese sentido, *Magí Domingo Tarancón* defiende en su tesina de fin de master [36] los puntos a tener en cuenta y las hipótesis a tomar para utilizar dichos esquemas.

En este trabajo se han utilizado los dos esquemas de resolución por los motivos que se expresan a continuación.

En primer lugar, dado que *Domingo* estudió unas simulaciones muy similares a las que se presentan en este trabajo por medio de esquemas *explícitos*, este trabajo constituye la oportunidad de estudiar el motor de cálculo *ABAQUS/Implicit*. Así pues, la complementariedad de los análisis no hará más que enriquecer el objetivo final: el proyecto de investigación de *Antonio Marí y Pablo Gonzalo Fernández*.

En segundo lugar, tal y como el lector comprenderá a lo largo de este trabajo, se ha considerado pertinente el uso del motor *implícito* para los análisis de sensibilidad y el estudio del “caso base”, así como el motor *explícito* para las simulaciones con tracciones en el plano. Este punto será discutido en las secciones correspondientes.

Por último, la posibilidad de comparar los dos esquemas de resolución que propone ABAQUS con una misma geometría y simulación constituye una buena oportunidad para confirmar sus ventajas y explorar sus defectos.

3.2 DEFINICIÓN DEL MODELO

Este apartado tiene por objetivo presentar las distintas características que definen el modelo de elementos finitos “base”. En primer lugar, describiremos la losa en términos estructurales y geométricos. A continuación, describiremos los modelos constitutivos que se han utilizado para describir los materiales y las hipótesis que se han tomado al definirlos. Finalmente, introduciremos las características propias de la simulación numérica: tipo de apoyos, condiciones de simetría, elementos de modelización utilizados, etc.

3.2.1 Definición de la losa

Debido que las simulaciones con elementos finitos pretenden servir de apoyo al proyecto experimental de la *Universitat Politècnica de Catalunya*, la losa presentará las mismas características que se determinaron para dicho proyecto. Así pues, se tomará como referencia el dimensionamiento resultante que realizaron los autores de la investigación en curso.

Asimismo, es interesante indicar que los autores proponen unas dimensiones y características geométricas similares al estudio realizado por *Adelifa y Polak* en [37], con el fin de poder tener una base de comparación.

La losa propuesta tiene unas dimensiones de 1650 x 1650mm y un espesor de 120mm. Con el fin de reproducir la rotura por cortante, la losa está apoyada de forma lineal en dos lados paralelos y libre en los otros dos contornos. Estos apoyos lineales se encuentran en los extremos de la losa, llegando a 75mm del borde. En cuanto a la carga, se define también con la intención de asegurar la rotura por cortante y para evitar, en cierto modo, la transferencia directa de esfuerzos entre la carga y el apoyo. Así pues, el centro de la placa de carga se debería situar a una distancia tal que $0.5 \leq a/d_l \leq 2.5$ (con $d_l = 95\text{mm}$). No obstante, nos interesaremos a múltiples valores de a/d_l , con el fin de evaluar su influencia en el tipo de rotura de la losa y en la carga última resistente. Por último, cabe indicar que la superficie de la placa de carga será de 150 x 150mm y que se aplicará de forma descendente.

El siguiente esquema resume la configuración del ensayo:

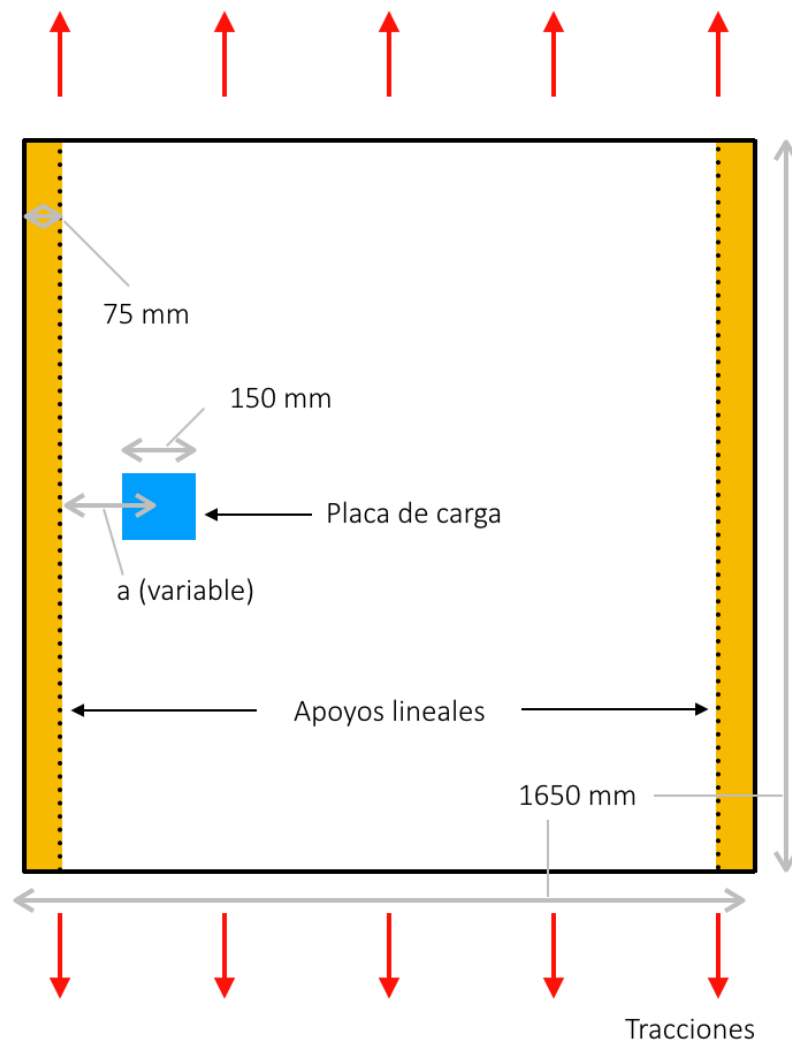


Figura 3.2: Esquema de las dimensiones de la placa y configuración de sus apoyos y zona de carga

Tal y como se puede observar en la figura anterior, las tracciones aplicadas en el plano de la losa se aplican en una sola dirección, paralela a la línea de apoyos lineales. Estas tracciones se aplican con unas placas de anclaje que se hormigonan dentro de la losa y a las que conectamos unas barras tipo *Dywidag* de $\varnothing 25\text{mm}$. La disposición de las barras de tracción y las consideraciones realizadas en el modelo se estudiarán con detalle en el capítulo 4 de este trabajo.

La armadura consiste principalmente en redondos de $\varnothing 12\text{mm}$, repartidos en las dos direcciones de la losa. De forma esquemática, se pueden distinguir 4 zonas de armado en la losa:

1. Dirección traccionada: 32 redondos $\varnothing 12\text{mm}$ (16 en la cara superior y 16 en la cara inferior) espaciados de 110mm entre barras internas y 70mm entre las dos barras externas.
2. Dirección no traccionada / Cara inferior: 16 redondos $\varnothing 12\text{mm}$ espaciados de 90mm, excepto en las zonas de anclaje de los *Dywidag*.
3. Dirección no traccionada / Cara superior: 11 redondos $\varnothing 12\text{mm}$ espaciados de 115mm y de 200mm, excepto en las zonas de anclaje de los *Dywidag*.
4. Dirección no traccionada / Barras auxiliares: parejas de redondos $\varnothing 10\text{mm}$ espaciados de 50mm, dispuestos en la cara superior y en la cara inferior, cerca de las zonas de anclaje de los *Dywidag*.

A modo de ejemplo, la siguiente figura muestra esquemáticamente las armaduras presentes en la cara superior de la losa. Los redondos verdes corresponden a la dirección traccionada ($\varnothing 12\text{mm}$), los azules corresponden a la dirección no traccionada ($\varnothing 12\text{mm}$), y los rojos corresponden a las barras auxiliares ($\varnothing 10\text{mm}$).

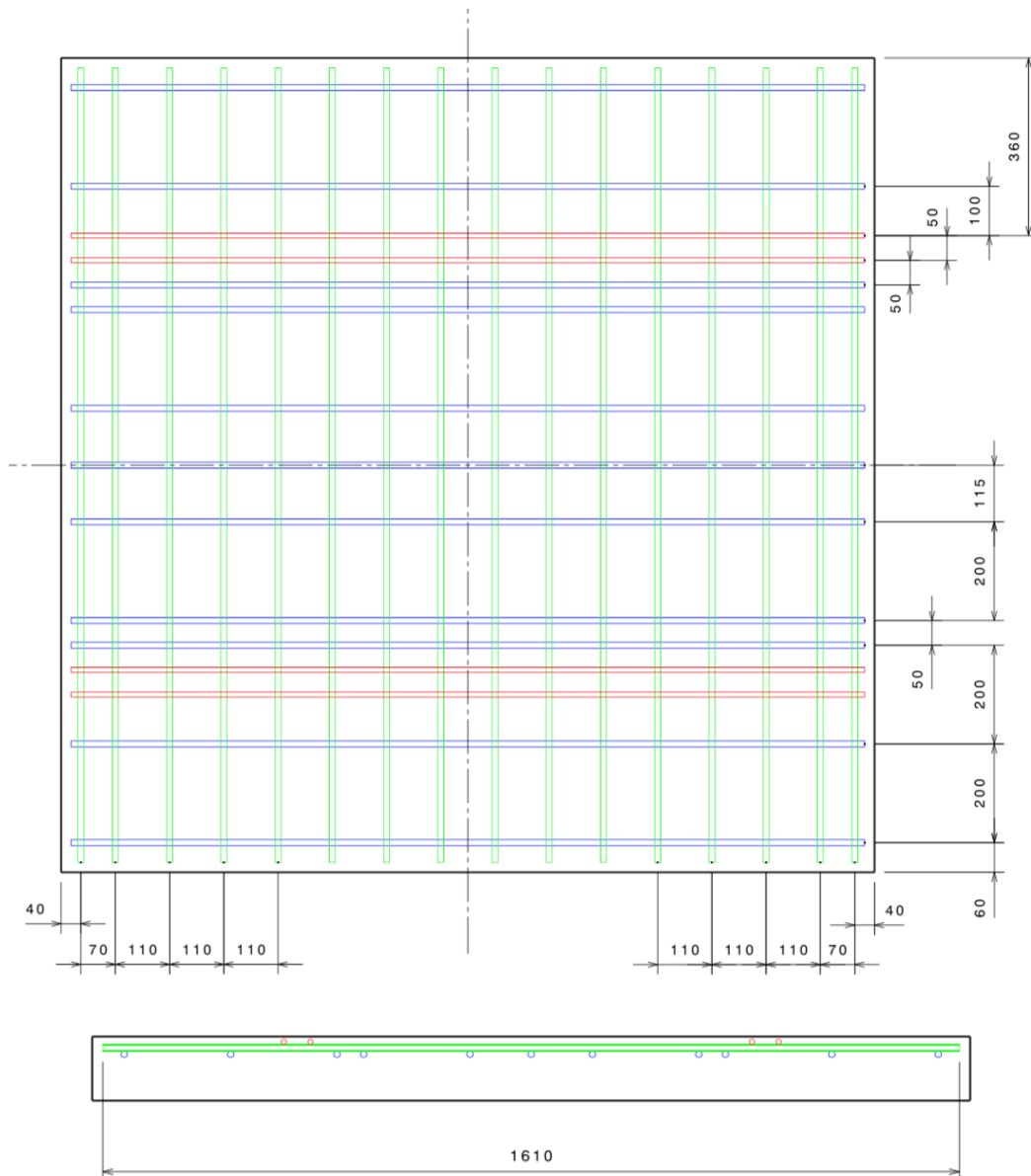


Figura 3.3: Esquema de las armaduras de la cara superior de la losa [36]

En el Anejo 1 se presentan los planos de detalle de las armaduras de la losa, así como los planos de detalle de las placas de tracción.

3.2.2 Definición de las propiedades materiales

Este apartado tiene por objetivo presentar las hipótesis que nos permiten definir las propiedades materiales del hormigón y del acero que se han simulado en el modelo de elementos finitos. Además, se introducirán los parámetros necesarios para la definición de los comportamientos no-lineales que se pretenden simular.

Cabe destacar, una vez más, que este trabajo se inscribe en un proyecto de investigación sobre *Evaluación de la capacidad resistente frente a esfuerzos tangentes de estructuras de hormigón mediante modelos mecánicos para la extensión de su vida útil*. Con relación a este proyecto, *Magí Domingo* realizó en [36] un estudio similar al que se presenta en este trabajo: estudió la rotura por *punzonamiento* en losas sometidas a tracciones en el plano. Debido que, tanto la tesina de *Domingo* como este trabajo se inscriben en el mismo proyecto de investigación, es importante considerar unas hipótesis de modelización compatibles y similares, puesto que servirán a elaborar un mismo documento final.

En ese sentido, es importante indicar que las losas que se ensayarán en el laboratorio a punzonamiento y a cortante presentan las mismas características geométricas y de diseño (presentadas en §3.2.1), cambiando únicamente las condiciones de carga y apoyo. Además, debido que los modelos de elementos finitos que simulan los ensayos deben valerse para la posteridad, es importante que se consideren las mismas hipótesis para definir las propiedades de los materiales.

Los modelos constitutivos de los materiales están presentados detalladamente en [36]. Asimismo, para que este trabajo sea “auto-explicativo”, a continuación se resumirán los conceptos fundamentales que permiten definir los modelos del hormigón y del acero.

3.2.2.1 Definición del hormigón

El programa ABAQUS ofrece dos principales modelos que permiten la simulación del complejo comportamiento elasto-plástico del hormigón, el *Concrete Smeared Cracking* y el *Concrete Damaged Plasticity Model (CDPM)*. Tal y como presenta *Domingo* en [36], el estudio de la literatura parece indicar que el *Concrete Damaged Plasticity Model* presenta un comportamiento más adecuado para el caso de estudio que nos ocupa [38]-[40].

La formulación y los parámetros que definen el modelo *Concrete Damaged Plasticity Model* se presentan en la sección 23.6.3 del manual del usuario de ABAQUS [41]. Así pues, en [41] se define el *Concrete Damaged Plasticity Model* como un modelo basado en la plasticidad y pensado para modelar el hormigón. El *CDPM* asume que hay dos principales motivos de rotura: por fisuración (tracciones) y por aplastamiento del hormigón (compresiones). La evolución de la superficie de fluencia (o de rotura) está controlada por dos variables de

endurecimiento, una a tracción ($\widetilde{\varepsilon}_t^{pl}$) y otra a compresión ($\widetilde{\varepsilon}_c^{pl}$), vinculadas a sus respectivos mecanismos de rotura.

Las propiedades de los materiales que definen el *Concrete Damaged Plasticity Model* en ABAQUS se pueden dividir en tres familias de datos:

1. Parámetros que definen la función de fluencia
2. Parámetros que definen el comportamiento a compresión
3. Parámetros que definen el comportamiento a tracción

A continuación se presentarán las tres familias de datos y se enunciarán las distintas hipótesis que se han tomado para definir el modelo que caracteriza el hormigón.

Parámetros de la función de fluencia

Para considerar un comportamiento elasto-plástico realístico y adecuado para emular el hormigón, es importante que la superficie de fluencia esté bien caracterizada y que evolucione conforme las tensiones coincidan con sus límites. ABAQUS considera la superficie de fluencia propuesta por *Lubliner et al.* [42] y modificada por *Lee y Fenves* [43] con el fin de capturar la evolución de la resistencia a compresión y a tracción en el hormigón. En §23.6.3-15 [41] se presentan detalladamente los parámetros que definen dicha superficie de fluencia.

Para este trabajo, los valores considerados son:

- $\psi = 40^\circ$: ángulo de dilatación medurado en el plano p - q (tensiones invariantes)
- $\epsilon = 0.1$: excentricidad definida en la función de fluencia
- $\sigma_{b0}/\sigma_{c0} = 1.16$: ratio entre las tensiones de equilibrio iniciales (*valor por defecto*)
- $K_c = 2/3$: factor de forma de la superficie de fluencia (*valor por defecto*)
- $\eta = 1 \cdot 10^{-6}$: coeficiente de viscosidad considerado durante el cálculo implícito (influye a la convergencia)

El valor de los parámetros considerados se ha definido a partir de las recomendaciones y valores preestablecidos de ABAQUS [41] y de los estudios paramétricos realizados por *Genikomосу y Polak* en [40].

Parámetros del comportamiento a compresión

El comportamiento a compresión del hormigón se puede dividir en dos ramas: comportamiento elástico y comportamiento plástico.

Basándonos en las proposiciones del *EN 1991-1-1* y del *Model Code*, podemos considerar que el comportamiento elástico-lineal del hormigón sometido a cargas uniaxiales de compresión se extiende para valores de tensiones $\sigma_c \leq 0.4 \cdot f_{cm}$. Para este rango, el comportamiento elástico del hormigón queda definido por medio de los siguientes parámetros:

- $f_{cm} = 43$: resistencia media a compresión del hormigón [MPa]
- $\nu = 0.2$: coeficiente de *Poisson*
- $E_{0.4} = 38153.82$: módulo de *Young* de la zona elástica (determinado más adelante) [MPa]

Para tensiones mayores a $0.4 \cdot f_{cm}$, deberemos considerar los modelos plásticos con el fin de definir el hormigón.

En cuanto a la caracterización del comportamiento post-elástico del hormigón, ABAQUS requiere como *input* una relación (tabular) compresión-deformación *inelástica*. Así pues, es importante puntualizar que la leyes de endurecimiento que se deberán definir se deben basar en *deformaciones inelásticas* ($\widetilde{\varepsilon}_c^{in}$), en lugar de en *deformaciones plásticas* ($\widetilde{\varepsilon}_c^{pl}$). Las *deformaciones inelásticas* de compresión se definen como la resta entre las *deformaciones totales* (ε_c) y las *deformaciones elásticas* correspondientes al hormigón no dañado (ε_{0c}^{el}):

$$\widetilde{\varepsilon}_c^{in} = \varepsilon_c - \varepsilon_{0c}^{el} \text{ con } \varepsilon_{0c}^{el} = \sigma_c / E_0 \quad (3.5)$$

Finalmente, los datos relacionados con las descargas (*unloading*) se definen en ABAQUS a partir de las curvas de compresión-daño, pilotadas por la relación $d_c - \widetilde{\varepsilon}_c^{in}$. Automáticamente, ABAQUS transformará las *deformaciones inelásticas* en *deformaciones plásticas* usando la siguiente relación:

$$\widetilde{\varepsilon}_c^{pl} = \widetilde{\varepsilon}_c^{in} - \frac{d_c}{1 - d_c} \cdot \frac{\sigma_c}{E_0} \quad (3.6)$$

En la siguiente figura se pueden encontrar los distintos parámetros que definen el comportamiento plástico y elástico del hormigón, a modo de resumen:

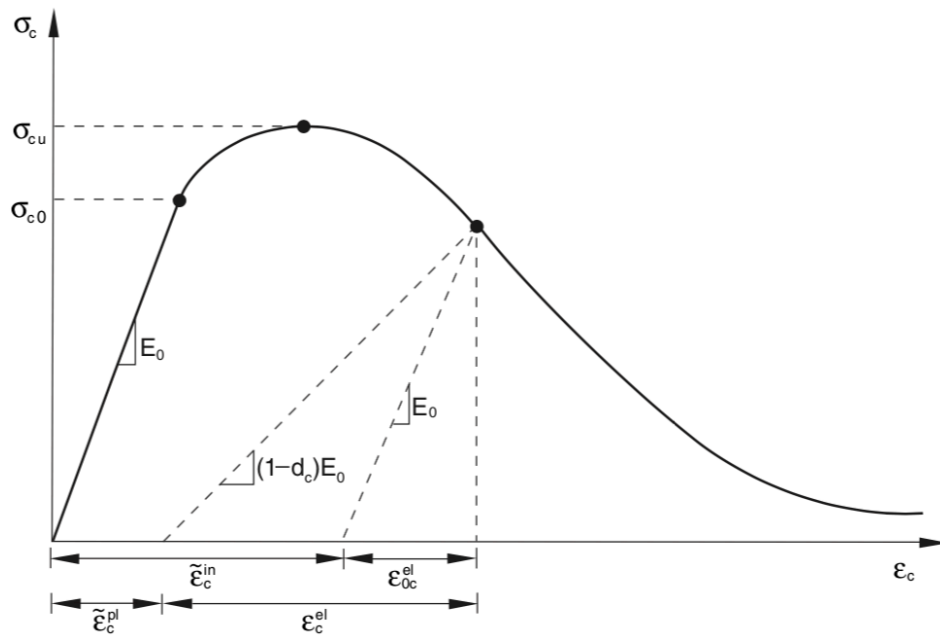


Figura 3.4: Relaciones constitutivas definidas en ABAQUS para modelar la compresión uniaxial del hormigón [41]

De las definiciones precedentes, podemos extraer la idea siguiente: una vez llegados al límite elástico del hormigón, las deformaciones post-elásticas se acumulan a las deformaciones ya obtenidas, mediante la relación elástica-lineal. Así pues, tal y como indica Domingo en [36], es de vital importancia asegurar la continuidad C0 entre la rama elástica y la plástica. Un ejemplo de los posibles conflictos de no garantizar la continuidad entre las curvas se puede encontrar en §3.2.2 de [36].

Para definir la rama post-elástica nos basaremos en las propuestas del *Eurocódigo 2* y de Genikomsou y Polak [40], puesto que permiten definir un comportamiento no-lineal. Ambos proponen utilizar la *parábola de Hognestad* para definir la relación compresión-deformación que caracterizará el comportamiento del hormigón. Matemáticamente se define según:

$$\sigma_c = f_{cm} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c0}} \right)^2 \right] \text{ para } \epsilon_c \leq \epsilon_{cu} \quad (3.7)$$

Donde:

- $\varepsilon_{c0} = 0.002$: deformación bajo máximas compresiones
- $\varepsilon_{cu} = 0.0035$: deformación última

Para asegurar la continuidad entre la rama elástica y la plástica, debemos asegurar que las expresiones que proporcionan las tensiones coincidan en el punto de cambio de comportamiento, esto es, en $\sigma_c = 0.4 \cdot f_{cm}$. Así pues, imponiendo dicha continuidad en la expresión (3.7), obtenemos:

$$0.4f_{cm} = f_{cm} \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_{0.4}}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \right] \rightarrow \varepsilon_{0.4} = \varepsilon_{c0} (1 - \sqrt{1 - 0.4}) = 4.50806 \cdot 10^{-4} \quad (3.8)$$

Finalmente, a partir de (3.8), es trivial obtener el módulo elástico necesario para asegurar la continuidad:

$$E_{0.4} = \frac{\sigma_{0.4}}{\varepsilon_{0.4}} = \frac{0.4 \cdot 43}{4.50806 \cdot 10^{-4}} = 38153,82 \text{ MPa} \quad (3.9)$$

Recapitulando, el comportamiento a compresión del hormigón queda definido por las siguientes relaciones tensión-deformación:

$$\sigma_c(\varepsilon_c) = \begin{cases} E_{0.4} \cdot \varepsilon_c & \text{si } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{0.4} \\ f_{cm} \left[1 - \left(1 - \frac{a}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \right] & \text{si } \varepsilon_c \geq \varepsilon_{0.4} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$a = \widetilde{\varepsilon}_c^m + \frac{\sigma_c(\varepsilon_c)}{E_{0.4}} \leq \varepsilon_{cu} \quad (3.11)$$

Donde el parámetro “a” permite realizar un cambio de variable en la ecuación de la parábola de *Hognestad* (3.7) y definir la rama post-elástica a partir de las *deformaciones inelásticas*, tal y como se ha comentado anteriormente. A título informativo, inicialmente consideraremos una deformación inelástica nula.

En la siguiente figura se pueden observar, gráficamente, las relaciones tensión-deformación resultantes del conjunto de hipótesis presentadas para el comportamiento a compresión del modelo *Concrete Damaged Plasticity Model*.

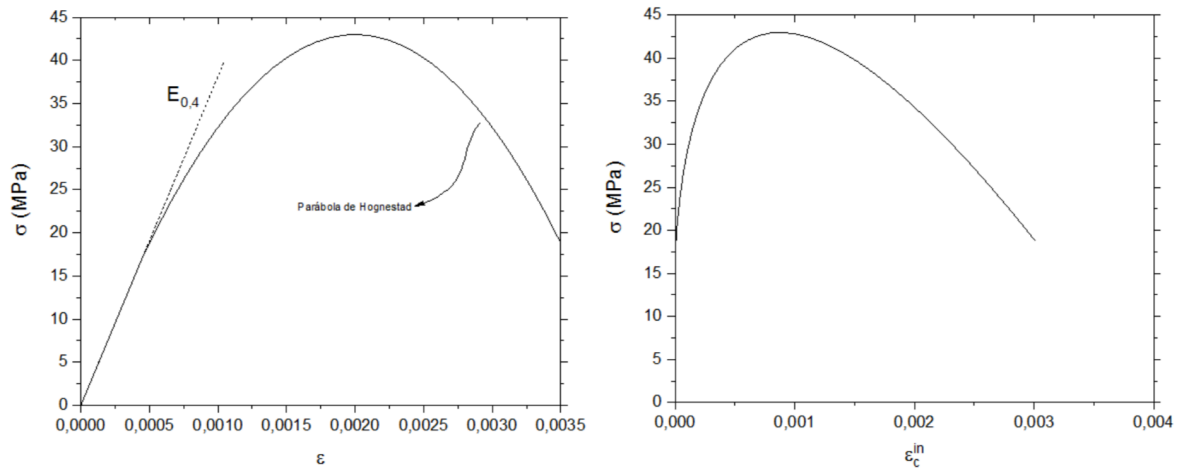


Figura 3.5: Relación compresión-deformación (derecha) y curva introducida en ABAQUS para la rama post-elástica (izquierda), considerando únicamente deformaciones inelásticas [36]

Parámetros del comportamiento a tracción

Al igual que el comportamiento a compresión, el comportamiento a tracción del hormigón se puede dividir en una rama elástica y en una rama post-elástica o plástica.

Para describir el comportamiento del hormigón a tracción nos basaremos en las proposiciones del *Model Code*. Desde un punto de vista general, la normativa separa la respuesta del hormigón en función de si este se encuentra fisurado o no fisurado, otorgando una relación tensión-deformación y otra de tensión-abertura de fisura, respectivamente.

El modelo propuesto en [28] define la rama elástica de forma lineal, a partir de, una vez más, el módulo de *Young* ($E_{0.4}$) y de el coeficiente de *Poisson* (ν); ambos definidos previamente. Asimismo, considera que el comportamiento elástico-lineal del hormigón sometido a cargas uniaxiales de tracción se extiende para valores de $\sigma_t \leq 0.9 \cdot f_{ctm}$, donde:

$$f_{ctm} = 0.3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (3.12)$$

A continuación, para tensiones entre $0.9 \cdot f_{ctm} \leq \sigma_t \leq f_{ctm}$, el hormigón empieza a presentar micro-fisuras y se debe considerar el comportamiento post-elástico, aunque aún definido por medio de relaciones tensión-deformación. Finalmente, al alcanzar el límite $\sigma_t = f_{ctm}$, asociado a una deformación de $\varepsilon_t = 0.15\text{‰}$, aparecen las fisuras discretas y debemos considerar modelos constitutivos capaces de describir las relaciones tensión-abertura de fisura.

Otro tema importante a considerar para el comportamiento a tracción del hormigón es la interacción con las armaduras. Al aparecer las fisuras, la definición de la interacción entre el hormigón resistente restante y las armaduras longitudinales es un parámetro fundamental si queremos capturar correctamente, entre otros, el efecto pasador descrito en §2.1.4.

En ABAQUS, esta interfaz se modela introduciendo una “rigidez de tensión” en el hormigón, con el objetivo de simular la transferencia de cargas que sucede entre hormigón y armaduras en las zonas fisuradas. Además, el concepto “rigidez de tensión” permite definir el comportamiento de deformación-reblandecimiento del hormigón fisurado.

ABAQUS propone en [41] dos modelos con el fin de definir la “rigidez de tensión”: definiendo relaciones *tensión-deformación de post-ruptura* o aplicando un criterio de *energía de fractura*. Debido que el modelo basado en la *energía de fractura* es más simple y que se ha utilizado en estudios que nos sirven de referencia [36][40], utilizaremos este modelo.

Además de considerar la interacción armadura-hormigón fisurado, el modelo de *energía de fractura* nos permite describir las relaciones tensión-abertura de fisura, necesarias para la definición de la rama post-elástica del hormigón a tracción.

El modelo de *energía de fractura* propuesto por ABAQUS se basa en la proposición que realizó *Hillerborg* en [44]. *Hillerborg* definió la energía necesaria para abrir una área unitaria de fisura (G_f) como un parámetro material, usando conceptos de *fractura frágil*, típica del hormigón a tracción. Con este enfoque, el comportamiento frágil del hormigón se caracteriza por medio de relaciones de *tensión-aberturas de fisura*, en lugar de relaciones tensión-deformación.

Así pues, en ABAQUS, el modelo de *energía de fractura* se puede definir de forma tabular mediante relaciones cualesquiera entre las tensiones y los desplazamientos en las zonas de fisuras:

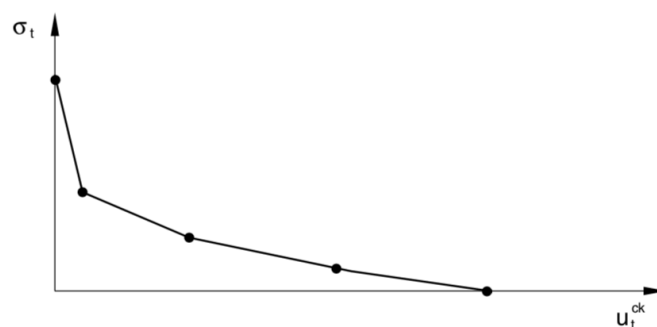


Figura 3.6: Curva tensión-abertura de fisura que caracteriza el modelo de energía de fractura [41]

Para definir las relaciones tensiones-aberturas de fisura ($\sigma - \omega$) y caracterizar la curva anterior para nuestra simulación, usaremos la propuesta de la normativa *Model Code* [28]. Este propone una relación bilineal $\sigma - \omega$, donde la energía de fractura, G_f , se define según:

$$G_f = 0.028 \cdot f_{cm}^{0.18} \cdot d_{max}^{0.32} \quad (3.14)$$

Con d_{max} el tamaño máximo de árido, considerado de 10mm para este trabajo.

La siguiente figura y las expresiones (3.15) y (3.16) definen la formulación propuesta por el *Model Code* para reproducir, mediante un modelo de energía de fractura, el comportamiento a tracción uniaxial del hormigón.

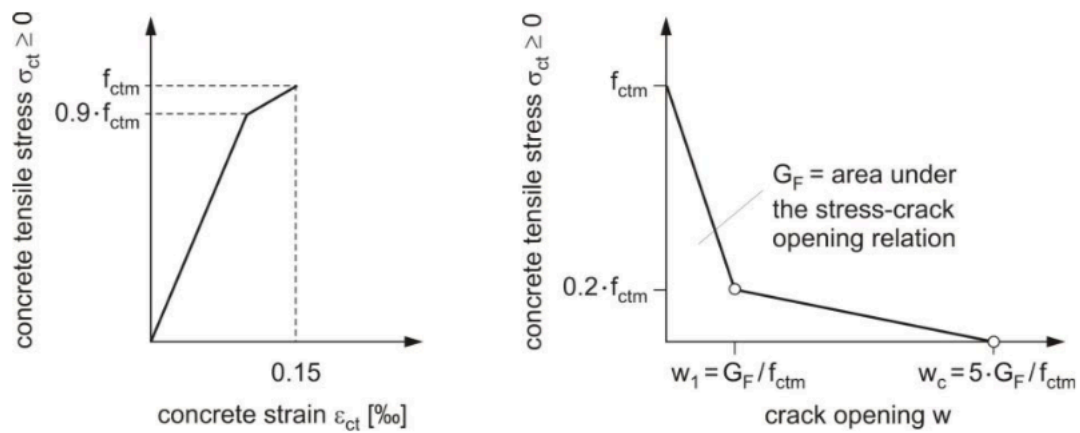


Figura 3.7: Representación esquemática de las relaciones tensión-deformación (izquierda) y tensión-abertura de fisura (derecha) propuestas por el Model Code [28]

$$\sigma_t = f_{ctm} \left(1 - 0.8 \frac{\omega}{\omega_1} \right) \quad \text{si } \omega \leq \omega_1 \quad (3.15)$$

$$\sigma_t = f_{ctm} \left(0.25 - 0.05 \frac{\omega}{\omega_1} \right) \quad \text{si } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \quad (3.16)$$

Donde:

- $\omega_1 = G_f / f_{ctm}$: abertura de fisura asociada a $0.2 f_{ctm}$ [mm]
- $\omega_2 = 5 G_f / f_{ctm}$: abertura de fisura última [mm]

Tal y como se puede observar en la figura 3.7, a diferencia del modelo de compresiones en el hormigón, la continuidad entre la rama elástica y la plástica está asegurada por la propia definición del modelo. No obstante, para definir de forma tabular el comportamiento a tracción, debemos tener consideraciones similares a las *deformaciones inelásticas* definidas

previamente. Así pues, para definir las dos zonas de la rama post-elástica, ABAQUS trabajará, esta vez, con *deformaciones de ruptura* ($\widetilde{\varepsilon}_t^{ck}$).

Una vez expuestas las posibilidades que nos ofrece ABAQUS y presentado el modelo teórico que tomamos como referencia (*Model Code*), estamos en condiciones de definir las características y formulaciones que presentará el modelo constitutivo final en ABAQUS.

Por un lado, se define el primer tramo de rama post-elástica, correspondiente a las tensiones entre $0.9 \cdot f_{ctm} \leq \sigma_t \leq f_{ctm}$, tal y como se puede observar en la figura 3.7. El *Model Code* ya define este tramo con relaciones tensiones-deformaciones. Así pues, debemos transformar únicamente las deformaciones “clásicas” a *deformaciones de ruptura*, para obtener una formulación coherente con los requerimientos de ABAQUS. Siguiendo el mismo procedimiento utilizado para el modelo a compresión, podemos definir las *deformaciones de ruptura* ($\widetilde{\varepsilon}_t^{ck}$) según:

$$\widetilde{\varepsilon}_t^{ck} = \varepsilon_t - \varepsilon_{0t}^{el} \text{ con } \varepsilon_{0t}^{el} = \sigma_t / E_0 \quad (3.17)$$

Con una *deformación de ruptura* inicial nula ($\widetilde{\varepsilon}_{t,in}^{ck} = 0$), correspondiente a la tensión $\sigma_t = 0.9 f_{ctm}$.

Por otro lado, el segundo tramo de la rama post-elástica está definida, en el *Model Code*, mediante una relación *tensión-abertura de fisura*. Debido que ABAQUS define las leyes constitutivas a partir de *deformaciones de ruptura* (y no aberturas de fisura), es necesario realizar un cambio de variable. En primer lugar, *Genikomsou y Polak* demuestran en [40] que la *abertura de fisura* (ω) se puede escribir en términos de *deformaciones de fisura* (ε_{ct}) por medio de la siguiente expresión:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_{t,max} + \frac{\omega}{l_c} \text{ con } \varepsilon_{t,max} = 0.15\% \leq \varepsilon_{t,max} \quad (3.18)$$

Donde l_c es la longitud característica de un elemento finito, considerada como la longitud media de la arista de un elemento.

Finalmente, es necesario transformar las *deformaciones de fisura* (ε_t) a *deformaciones de ruptura* ($\widetilde{\varepsilon}_t^{ck}$). Para realizar este último cambio de variable, se debe sustraer la deformación

elástica asociada al punto de la curva tensión-deformación que se está estudiando. Matemáticamente:

$$\widetilde{\varepsilon}_t^{ck} = \left(\varepsilon_{t,max} - \frac{\sigma_t(\varepsilon_t)}{E_{0.4}} \right) + \frac{\omega}{l_c} \quad (3.19)$$

Recapitulando, el comportamiento a tracción del hormigón queda definido en ABAQUS a partir de las siguientes relaciones tensión-deformación:

$$\sigma_t(\varepsilon) = \begin{cases} E_{0.4} \cdot \varepsilon_t & \text{si } \sigma_t \leq 0.9f_{ctm} \\ f_{ctm} \left(0.9 - 0.1 \frac{\widetilde{\varepsilon}_t^{ck}}{\varepsilon_{t,max} - \varepsilon_{0.9}} \right) & \text{si } \widetilde{\varepsilon}_t^{ck} \leq \varepsilon_{t,max} - \varepsilon_{0.9} \\ f_{ctm} \left(1 - 0.8 \frac{a \cdot f_{ctm}}{G_f} \right) & \text{si } a \leq G_f / f_{ctm} \text{ \& } \varepsilon_t \geq \varepsilon_{t,max} \\ f_{ctm} \left(0.25 - 0.05 \frac{a \cdot f_{ctm}}{G_f} \right) & \text{si } G_f / f_{ctm} \leq a \leq 5 \cdot G_f / f_{ctm} \end{cases} \quad (3.20)$$

$$a(\widetilde{\varepsilon}_t^{ck}) = \left[\widetilde{\varepsilon}_t^{ck} - \left(\varepsilon_{t,max} - \frac{\sigma_t(\varepsilon_t)}{E_{0.4}} \right) \right] l_r \quad (3.21)$$

Donde:

- $E_{0.4}$: módulo de Young definido en (3.9) [MPa]
- $\varepsilon_{0.9}$: deformación asociada a la tensión $\sigma_t = 0.9f_{ctm}$
- $\varepsilon_{t,max}$: deformación asociada a la tensión $\sigma_t = f_{ctm}$
- a : abertura de fisura en función de las deformaciones de ruptura [mm]
- G_f : energía de fractura definida en (3.14) [N/mm]

En la siguiente figura se pueden observar, gráficamente, las relaciones tensión-deformación resultantes del conjunto de hipótesis presentadas para el comportamiento a tracción del modelo *Concrete Damaged Plasticity Model*.

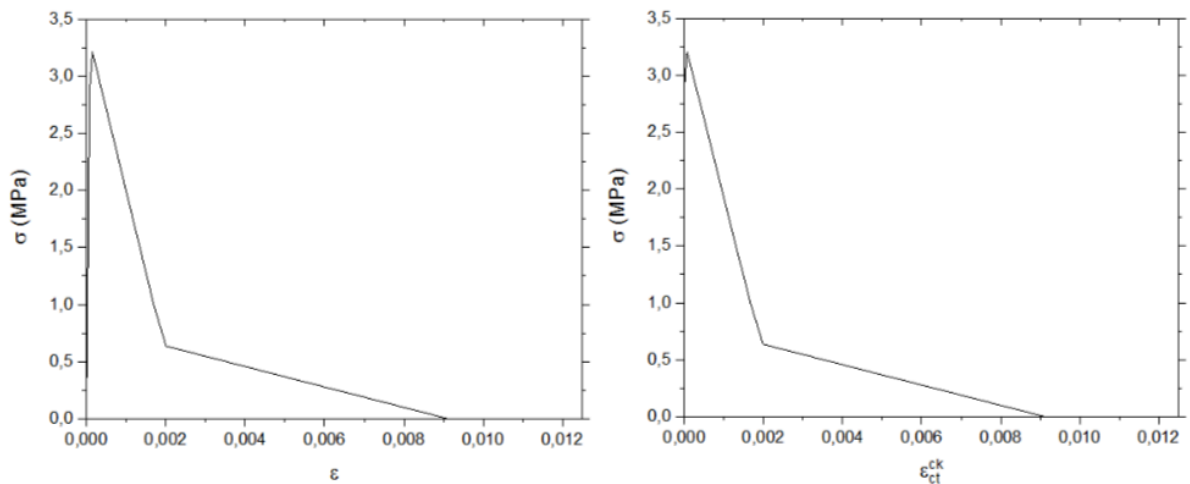


Figura 3.8: Relación tracción-deformación (derecha) y curva introducida en ABAQUS para la rama post-elástica (izquierda), considerando únicamente deformaciones de ruptura [36]

3.2.2.2 Definición del acero

La definición del acero se basa en un modelo elasto-plástico perfecto, donde el criterio de plastificación isotrópica viene definida por la superficie de fluencia de *Von Mises*. Así pues, la definición del acero requiere únicamente de un módulo de *Young* y un coeficiente de *Poisson* para el régimen elástico, y de un valor límite para definir la plastificación. Considerando barras de acero corrugadas B500:

- $E_a = 200,000$: módulo de *Young* [MPa]
- $\nu = 0.3$: coeficiente de *Poisson*
- $f_y = 500$: límite elástico del acero [MPa]

Estos parámetros se introducen de modo tabular en ABAQUS y el comportamiento resultante que caracteriza las propiedades del acero se puede observar en el siguiente gráfico tensión-deformación:

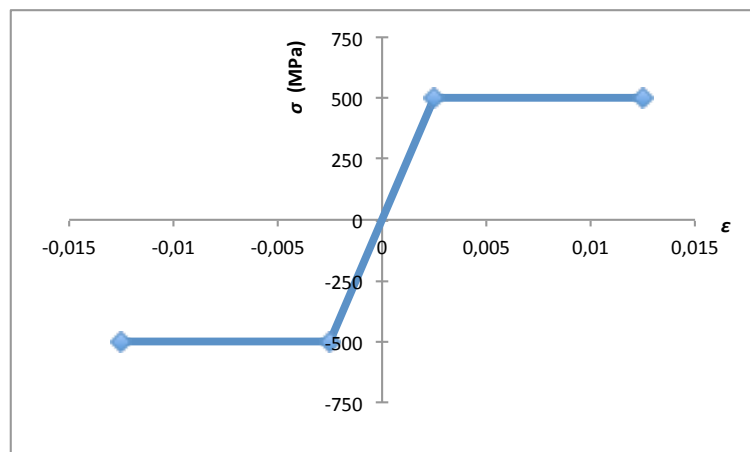


Figura 3.9: Diagrama tensión-deformación del acero modelado

3.2.3 Definición de la simulación numérica

Una vez hemos definido la geometría de la losa y los modelos constitutivos que se utilizarán, debemos crear la losa real en el mundo de los elementos finitos. En otras palabras, debemos definir la geometría de la losa en el idioma de ABAQUS, definir las interacciones entre los elementos, considerar las condiciones de contorno, etc.

Este apartado tiene el objetivo de presentar los parámetros y hipótesis que permiten reproducir la losa dimensionada y realizar una simulación fiel a la realidad.

El modelo contiene dos tipos de elementos geométricos, creados y definidos separadamente en ABAQUS:

- Losa de hormigón (sin armadura): está definida como un sólido tridimensional deformable y se le atribuyen las propiedades constitutivas descritas en §3.2.2.
- Armaduras: están definidas como elementos tipo viga (*beam elements*). Estos elementos se describen a partir de una línea generatriz (objeto alámbrico) y de una sección circular asociada, según el diámetro correspondiente. ABAQUS permite que los *beam elements* estén sometidos a deformaciones axiales y a curvaturas, esto es, que sean capaces de resistir a esfuerzos normales y a momentos.

También se le atribuyen las propiedades constitutivas descritas en §3.2.2.

Una vez definidos los elementos que representan la geometría, es necesario proponer un principio de interacción entre ambos. Para el clásico caso del hormigón armado, el manual de usuario de ABAQUS propone en [45] el uso de un vínculo llamado *embedded regions*. Esta relación permite incrustar un grupo de elementos (*beams* de armaduras) a otro elemento “huésped” (losa 3D de hormigón). La relación *embedded regions* permite que los elementos incrustados modifiquen las propiedades mecánicas del cuerpo huésped y sus grados de libertad.

Un parámetro clave para cualquier simulación con elementos finitos es la definición de la malla. Debido que se han utilizado dos tipos de objetos geométricos, se han utilizado dos mallas distintas para discretizar los elementos.

En cuanto al hormigón, se ha utilizado una malla basada en elementos cúbicos de 8 nodos (vértices del cubo) de tipo *C3D8R*. La dimensión característica de la arista es de 20mm,

si bien se ha realizado un estudio de sensibilidad que se presentará en los próximos apartados.

En cuanto a las armaduras, debido que se definen como un objeto alámbrico, se ha utilizado una malla basada en 2 nodos conectados en el espacio (tipo *B31* definido en ABAQUS). Con el fin de asegurar una cierta compatibilidad entre losa y armaduras, la dimensión característica se toma igual a la malla del hormigón (20mm para el caso base).

Finalmente, para terminar la definición del modelo, es necesario describir las condiciones de contorno y las cargas a aplicar. Las condiciones de contorno las podemos dividir en dos grupos, las condiciones de apoyo y las condiciones resultantes de la simetría.

En primer lugar, si consideramos la geometría de la losa descrita en §3.2.1 y, más específicamente, en la figura 3.2, podemos constatar que la losa presenta un eje de simetría en el plano horizontal. La siguiente figura ilustra la simetría.

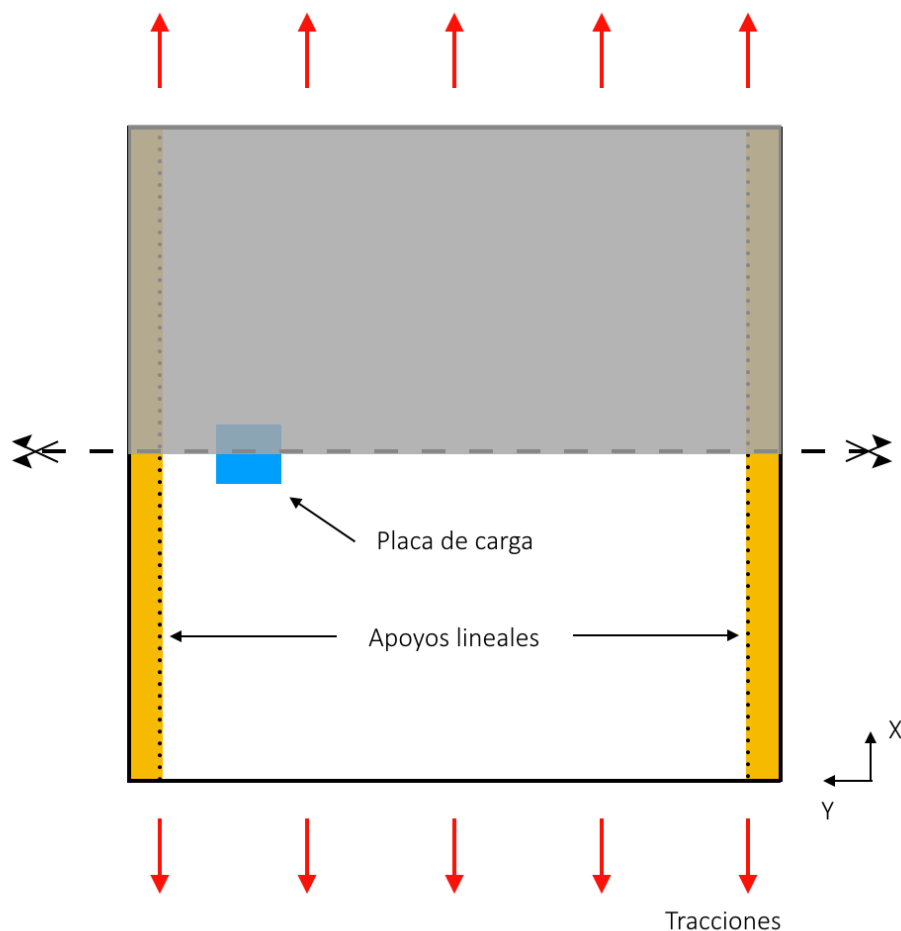


Figura 3.10: Esquema de la simetría de la losa

Esta propiedad se ha aprovechado en la simulación numérica con el fin de reducir el coste computacional. Así pues, gracias al uso de la simetría somos capaces de modelar un 50% menos de elementos y obtener un resultado igual de preciso, reduciendo el tiempo de cálculo a la mitad.

No obstante, para aplicar correctamente las condiciones de simetría se deben prescribir una serie de condiciones de contorno en los límites del modelo. Por ello, en las caras que se interseccionan con el eje de simetría debemos imponer la condición de *empotramiento deslizante*. En términos prácticos, esto se traduce por permitir el desplazamiento vertical, pero bloquear el desplazamiento horizontal y las rotaciones alrededor del eje de simetría.

En el modelo presentado en ABAQUS, la simetría se realiza con respecto al eje Y y la condición de *empotramiento deslizante* se impone al prescribir $U2=UR1=UR3=0$; donde 1-2-3 hacen referencia a los ejes X-Y-Z, respectivamente.

En segundo lugar, para completar la definición de las condiciones de contorno, debemos considerar las condiciones de apoyo de la placa.

Tal y como se ha descrito en §3.2.1, la losa está apoyada linealmente en dos extremos paralelos y con un ancho de apoyo de 75mm. Con el fin de asegurar el ancho de apoyo, se ha realizado una partición geométrica en el modelo, creando una línea a 75mm del borde de la losa. A efectos prácticos, esta partición permite generar una malla en ABAQUS que asegurará que no haya elementos finitos que se encuentren en la zona apoyada y en la zona libre, simultáneamente.

Una vez podemos identificar claramente la zona apoyada y los elementos que se encuentran en su interior, aplicamos las condiciones de apoyo a los elementos correspondientes. Con el fin de emular el comportamiento real de un apoyo se han conectado los elementos con un “suelo” ficticio, mediante elementos *Spring to Ground*. Esta conexión reproduce el comportamiento de un muelle elástico-lineal, para el cual se define una rigidez de compresión y otra de tracción. Debido que el suelo del laboratorio y los apoyos de la losa se suponen indeformables, se ha definido una rigidez a compresión (descenso de la losa) anormalmente elevada. Este elevado valor permite emular el comportamiento “infinitamente” rígido del apoyo. Por otro lado, se ha supuesto que la losa se puede levantar libremente si tiene un movimiento vertical ascendente. Así pues, la rigidez a tracción del muelle *Spring to Ground* se ha supuesto infinitesimal.

Cabe destacar que la definición de los apoyos por medio de muelles permite, con respecto a la definición de sólidos rígidos, simplificar el problema desde un punto de vista computacional.

En la siguiente figura se puede observar el modelo de elementos finitos creado en ABAQUS, donde se pueden observar las condiciones de contorno (simetría y apoyo) descritas anteriormente.

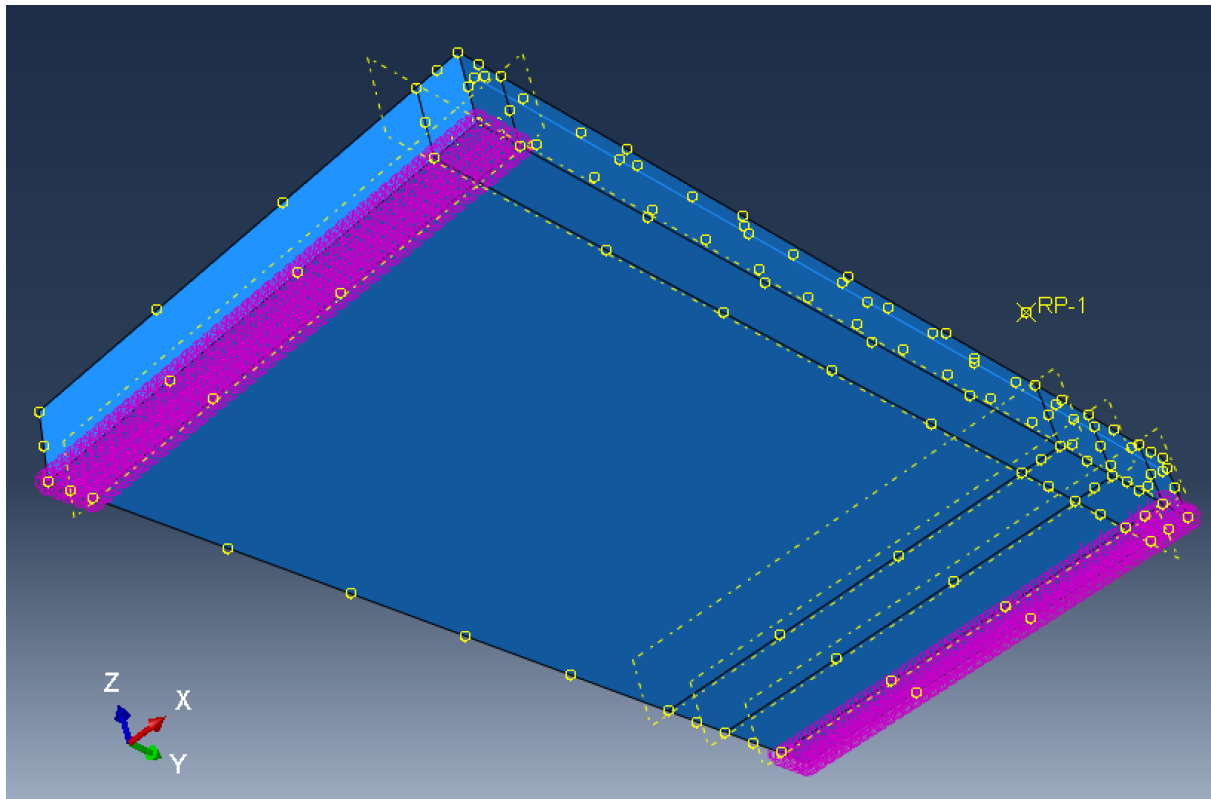


Figura 3.11: Modelo de elementos finitos creado en ABAQUS

En cuanto a las cargas aplicadas, se pueden dividir en tres grupos:

- Peso propio: se calcula según la propiedades de los materiales, considerando una fuerza gravitatoria de $g = -9.81 \text{ m/s}^2$.
- Tracciones: no se consideran en el modelo base (capítulo 3) y se introducirán en el modelo a tracciones (capítulo 4).
- Carga a cortante: se aplica mediante *control por desplazamiento*. Esta metodología se utiliza con el fin de reproducir fielmente los futuros ensayos en laboratorio y para obtener una curva completa de carga-desplazamiento. Esta última nos

permitirá estudiar la carga última, la rigidez de la respuesta elástica, el comportamiento post-elástico, etc.

El *control por desplazamiento* consiste en imponer un desplazamiento incremental a una serie de elementos de la losa y observar la reacción que produce la losa como respuesta. Los elementos que siguen este desplazamiento prescrito corresponden a la placa de carga, de 150 x 75mm debido a las condiciones de simetría. Asimismo, nótese que estos elementos están sometidos a un desplazamiento último de 17mm.

Por último, cabe indicar que ABAQUS es un programa adimensional. Por ello, es importante mantener una coherencia entre unidades con el fin de conservar los correctos ordenes de magnitud.

Para definir el modelo se han utilizado las siguientes unidades: *mm* (milímetros), *N* (Newtons), *T* (Toneladas), *MPa* (Megapascasles) y *s* (segundos).

3.3 RESULTADOS

Una vez se ha descrito el modelo y los parámetros de modelización, se está en condiciones de analizar los resultados y valorar su consistencia y coherencia. Este apartado tiene el objetivo de analizar el modelo “base” (sin tracciones) con el fin de calibrarlo, analizar su comportamiento y compararlo a los resultados obtenidos con las normativas vigentes.

En primer lugar, con el fin de calibrar el modelo y las simulaciones, es de vital importancia realizar un análisis de sensibilidad de ciertas variables.

Por un lado, cualquier modelo de elementos finitos está tiene una estrecha relación con el mallado. Ya sea en términos de coste computacional, de estabilidad en el cálculo o de precisión de los resultados, la definición de la malla tiene un rol fundamental en el modelo. Por este motivo, estudiaremos distintos tamaños de malla con el fin de analizar la sensibilidad del resultado y de identificar la más conveniente para los trabajos posteriores.

Por otro lado, un parámetro fundamental en la rotura por cortante es la distancia carga-apoyo. Esta influye dos aspectos cruciales, la transmisión directa de esfuerzos al apoyo y la diferenciación entre una rotura a flexión o a cortante. Tal y como hemos introducido en §2.2,

ciertos autores utilizan únicamente un cierto rango de valores que permitan asegurar la rotura por cortante ($0.5 < a/d_l < 2.5$). Esta idea se basa en los estudios que realizó *Kani* en [46], donde presenta un estudio paramétrico de a/d_l para una serie de vigas. *Kani* observó que las vigas empezaban a romper a cortante para valores $a/d_l = 2.5$ y que, además, esta configuración coincidía con el punto de menor resistencia relativa. En la siguiente imagen se puede observar dicho comportamiento, donde M_u es el momento último resistente y M_{fl} es la resistencia a flexión de la viga.

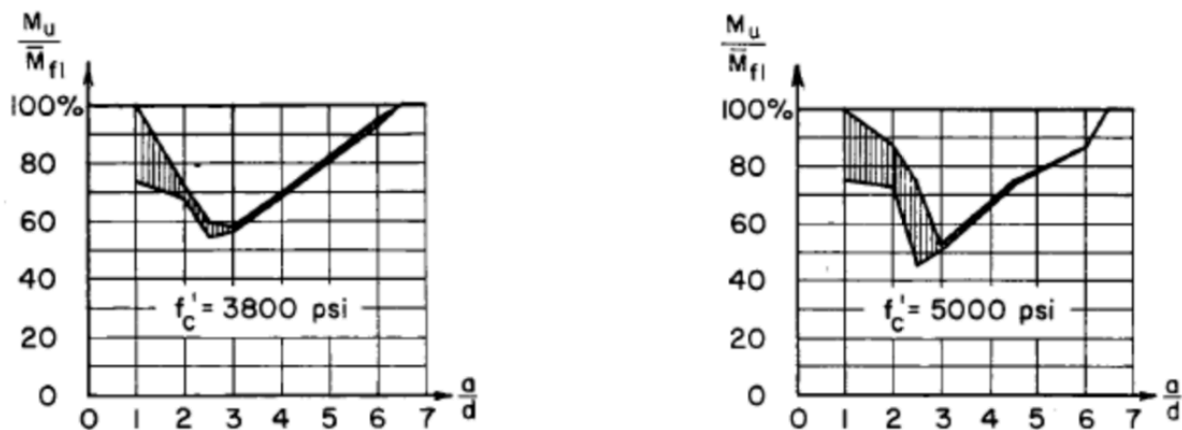


Figura 3.12: Resistencia relativa en vigas para distintos valores de a/d [46]

Para valores inferiores a $a/d_l = 2.5$, la viga rompe por cortante y, conforme la carga se acerca al apoyo, aumentamos la carga última que puede soportar la viga (al igual que en el caso de las losas - §2.2.3). Para $a/d_l > 2.5$, la viga rompe habitualmente por flexión, recuperando la capacidad total de resistencia para $a/d_l = 6.5$.

Debido que *Kani* realizó el estudio únicamente para el caso de vigas, es de vital importancia estudiar detalladamente el comportamiento en losas para distintas relaciones a/d_l . Este estudio nos permitirá determinar las relaciones a/d_l que, para nuestra simulación, aseguran la rotura por cortante en losas. Asimismo, este análisis servirá de base para la determinación de las condiciones de ensayo de la placa real, permitiendo asegurar su rotura a cortante “puro”.

Una vez se ha determinado una discretización espacial adecuada y se ha definido una relación a/d_l conveniente, estamos en condiciones de estudiar los resultados de nuestro modelo “base”. Se analizará el comportamiento del modelo en términos de carga-desplazamiento, fijándonos en las cartografías de tensiones necesarias y en los *time-steps*

pertinentes; con el fin de comprender el comportamiento del modelo y las especificaciones de la rotura por cortante en losas en MEF no-lineales.

Por último, compararemos este modelo “base” con las normativas presentadas en §2.3.1 y §2.3.2. Asimismo, compararemos el eventual decalaje MEF-Normativa con los estudios presentados en §2.3.3, que comparan ensayos reales con las distintas normativas.

3.3.1 Estudio paramétrico del modelo

Influencia del tamaño de malla

Para estudiar la estabilidad numérica y el coste computacional, se han estudiado simulaciones con los siguientes tamaños de malla: 40mm, 35mm, 30mm, 24mm, 22mm, 20mm y 15mm. El objetivo es analizar el comportamiento del motor de resolución implícito para distintos tamaños de malla y comparar las diferentes cargas de rotura. Para este estudio paramétrico, con el fin de asegurar la rotura por cortante la losa, dispondremos la carga con $a/d = 2.5$.

En el siguiente gráfico se observa la respuesta carga-desplazamiento para los distintos tamaños de malla:

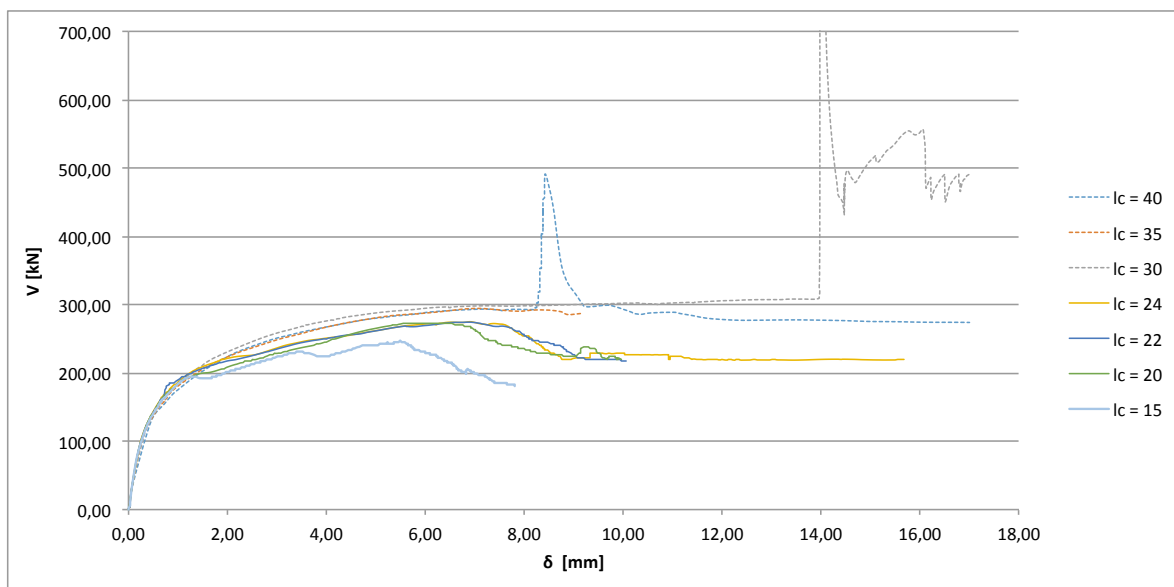


Figura 3.13: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos tamaños de malla

De la figura anterior podemos realizar múltiples análisis. En primer lugar, se puede observar que únicamente dos de las simulaciones alcanzan el desplazamiento máximo impuesto, de 17mm ($lc = 40$ y $lc = 30$).

En segundo lugar, se identifican importantes inestabilidades numéricas para los casos con mayores tamaños de malla, representados con líneas discontinuas en la figura 3.13. Por un lado, los casos $lc = 40$ y $lc = 30$ presentan picos en la relación carga-desplazamiento. Estos picos, al ser localizados y anormalmente elevados en términos de carga, se pueden atribuir a inestabilidades numéricas, pues no representan el comportamiento real de la losa. Por otro lado, la simulación con malla $lc = 35$ nos provee resultados únicamente para la rama elástica. En ambos casos, se puede concluir que el motor de cálculo implícito, para los parámetros numéricos definidos, presenta inestabilidades importantes al caracterizar la rama post-elástica de las simulaciones definidas con grandes mallas.

Siguiendo el análisis, observamos que las mallas inferiores a 30mm empiezan a representar un comportamiento más adecuado y realista. En efecto, las inestabilidades son muy localizadas y las curvas carga-desplazamiento se pueden equiparar a las curvas experimentales. Si nos centramos en estas mallas:

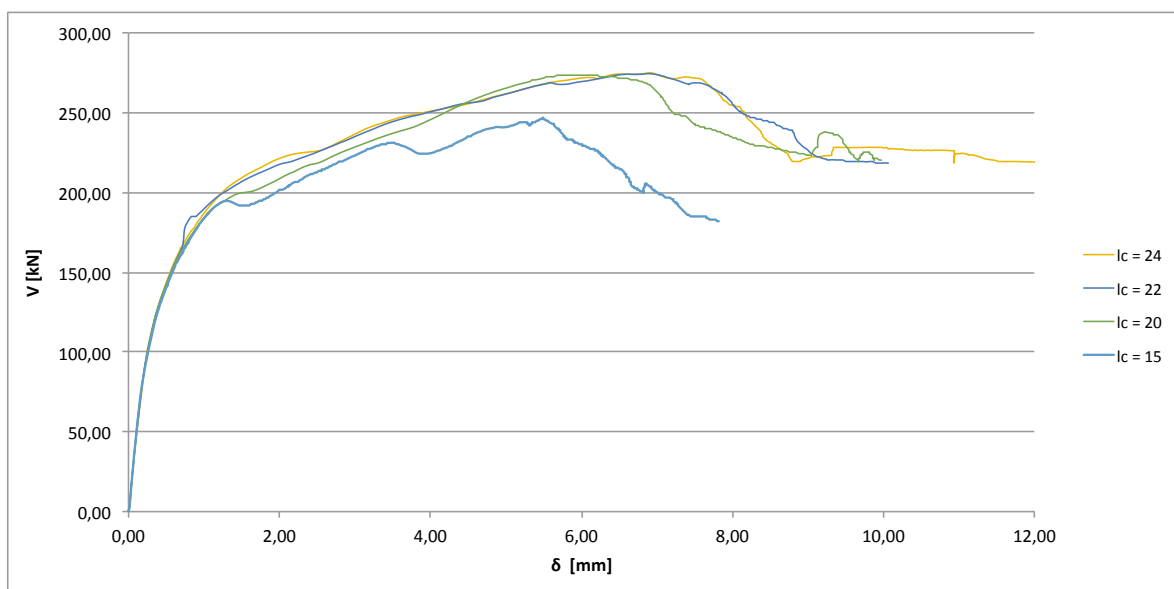


Figura 3.14: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos tamaños de malla - Mallas pequeñas

De la figura 3.14 se pueden extraer conclusiones muy interesantes. Por un lado, podemos confirmar que el comportamiento elástico lineal no depende del tamaño de malla.

En efecto, se observa que todas las curvas coinciden para valores de desplazamiento inferiores a 0.6mm.

Por otro lado, este comportamiento coincidente entre simulaciones con distintas mallas no se puede extender cuando aparecen las primeras micro-fisuras en el hormigón. Nótese que para ≈ 100 kN existe un cambio de inclinación en la curva $V-\delta$, debido a la aparición de micro-fisuras. Este cambio de rigidez es distinto en función del tamaño de malla. Tal y cómo se observa en la figura 3.14, las mallas $l_c = 24$ y $l_c = 22$ presentan rigidez parecidas, pero esta aumenta al reducir el tamaño de malla.

En cuanto al comportamiento post-elástico se puede constatar que todas las simulaciones de la figura 3.14 presentan el mismo comportamiento global: rotura frágil, seguida por una resistencia post-pico que tiende a estabilizarse (resistencia residual). La disminución repentina de la tensión con respecto al desplazamiento es un comportamiento característico de la rotura frágil del hormigón a cortante, motivo por el cual las simulaciones reproducen fielmente la realidad.

No obstante, cabe diferenciar entre dos sub-grupos: mallas muy finas ($l_c = 15mm$) y mallas finas. Las mallas finas presentan un comportamiento realista, con una única rigidez constante al aparecer las primeras micro-fisuras en el hormigón y con una rotura frágil “continua” en términos de la curva $V-\delta$. Sin embargo, este comportamiento regular y continuo no se reproduce para el caso $l_c = 15mm$. Por un lado, podemos observar que la curva $V-\delta$ presenta un comportamiento escalonado en la zona elástica con micro-fisuras. Por otro lado, la zona próxima a la resistencia de pico es muy escarpada, a diferencia de las mallas finas, que presentan un comportamiento más *smooth*, típico de los resultados experimentales.

Intuitivamente, el lector podría imaginar que la caracterización del ensayo se vuelve más realista y pertinente a medida que refinamos la malla. No obstante, la peor caracterización del ensayo con una malla de $15mm$ con respecto a las mallas finas viene justificado por el tipo de rotura que presentan las simulaciones.

Recordemos que, debido que el hormigón es extremadamente frágil a las tracciones, este presenta estados fisurados. Dichas fisuras son fenómenos muy localizados y, en consecuencia, un refinamiento de la malla introduce bandas de fisuración más estrechas. Esta

localización de tensiones produce, en un programa de MEF como ABAQUS, importantes problemas de convergencia. Así pues, el refinamiento de la malla, al llegar a un cierto umbral, se transforma en una solución contraproducente para caracterizar el modelo con mayor precisión.

Otro aspecto interesante a observar es el comportamiento posterior a la resistencia post-pico. En experimentos reales, la zona post-elástica correspondiente a la resistencia residual suele presentar un comportamiento típico de “grandes deformaciones”, esto es, importantes deformaciones para cambios ínfimos de la carga. No obstante, para las simulaciones realizadas con el motor implícito, se puede constatar que la resistencia residual presenta, según la malla estudiada, una serie de inestabilidades localizadas. Estas se observan para valores $\delta > 8\text{mm}$ en la figura siguiente:

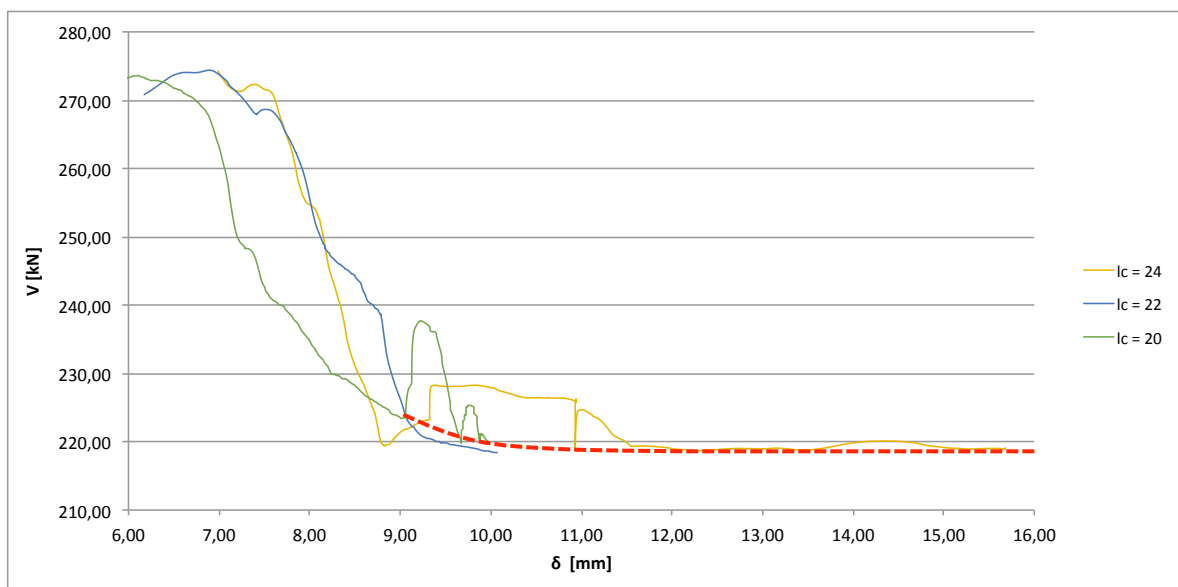


Figura 3.15: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos tamaños de malla - Mallas pequeñas - Zona post-elástica

En efecto, observamos que ciertas simulaciones presentan comportamientos que distan de una representación física real. No obstante, es importante indicar que, si obviamos estas inestabilidades locales, encontramos una tendencia hacia una resistencia residual constante y similar para las distintas mallas (línea discontinua en la figura 3.15).

Además de la curva carga-desplazamiento, hay otros datos interesantes a analizar para evaluar la influencia del tamaño de malla. Uno de ellos es la evolución de la carga de rotura, sin considerar las inestabilidades numéricas de las distintas simulaciones. Esta información se recoge en la siguiente tabla:

	Carga máxima (kN)	Error relativo con respecto $l_c=20\text{mm}$
$l_c = 40\text{mm}$	293,49	7,24%
$l_c = 35\text{mm}$	294,42	7,58%
$l_c = 30\text{mm}$	298,32	9,01%
$l_c = 24\text{mm}$	275,02	0,49%
$l_c = 22\text{mm}$	274,34	0,24%
$l_c = 20\text{mm}$	273,67	-
$l_c = 15\text{mm}$	246,53	9,92%
Desv. Estándar	17,98	

Tabla 3.1: Cargas máximas de rotura para distintos tamaños de malla

Se puede constatar que el motor de cálculo implícito nos proporciona, en términos estadísticos, una buena aproximación de la resistencia máxima de la losa a cortante. En efecto, para distintos tamaños de malla obtenemos resultados que son bastante próximos. En la tabla 3.1 seguimos constatando la diferencia de comportamiento entre mallas “grandes” (40mm a 30mm), mallas “pequeñas” (24mm a 20mm) y mallas “muy pequeñas” (15mm) pues el error relativo con respecto a $l_c = 20\text{mm}$ presenta un factor 10 entre un caso y otro. Asimismo, es importante remarcar la reducida desviación estándar de los resultados, prueba de la estabilidad del motor implícito en la rama elástica y inicio de la rama post-elástica. A título de ejemplo, en el análisis de sensibilidad al tamaño de malla que realizó *Domingo* en [36], el motor de cálculo explícito obtuvo cargas últimas presentando 60.28kN de desviación estándar, un resultado 3.5 veces mayor a los presentados en la tabla 3.1.

Un último aspecto importante a evaluar es el coste computacional. Como bien indicamos en §3.1, este parámetro puede ser determinante o limitante para un motor de cálculo implícito. Recapitulando las distintas informaciones de las simulaciones:

	Num. Elementos	Tiempo cálculo
$l_c = 40\text{mm}$	8268	15h21
$l_c = 35\text{mm}$	8877	0h35
$l_c = 30\text{mm}$	11994	13h11
$l_c = 24\text{mm}$	17330	4h49
$l_c = 22\text{mm}$	19484	40h12
$l_c = 20\text{mm}$	26836	22h02
$l_c = 15\text{mm}$	54562	50h20



NOTA: simulación no terminada, importantes inestabilidades

Tabla 3.2: Número de elementos y coste computacional para distintos tamaños de malla

Tal y como podemos constatar, el esquema de resolución implícito tiene un alto coste computacional. Ciertas simulaciones pueden tardar 1 día o más, mientras los cálculos con métodos explícitos se mueven alrededor de las pocas horas o decenas de minutos. Asimismo, cabe destacar la importante variabilidad en términos de coste computacional, sin presentar una relación inequívoca entre el tamaño de malla y el tiempo de cálculo. Si bien constatamos que para menores mallas el tiempo de cálculo suele aumentar, esta conclusión no se puede establecer como un axioma (nótese el bajo coste computacional de $lc=24mm$ o el alto coste de $lc=22mm$, con comparación a $lc=20mm$).

El alto coste computacional y su variabilidad vienen motivados por dos razones. Por un lado, cabe indicar que la mayoría del esfuerzo computacional está destinado al estudio de la rama post-elástica. De hecho, si nos quedamos con la parte elástica de la simulación, los costes computacionales del método implícito pueden ser equiparables a su homólogo explícito. Por otro lado, las inestabilidades que hemos observado en las distintas curvas carga-desplazamiento para la zona post-elástica aumentan considerablemente el tiempo de cálculo y la estabilidad de este a lo largo del refinamiento. Por estos dos motivos, constatamos una gran variabilidad y magnitud en el coste computacional del motor implícito.

Esquemáticamente, podemos resumir las conclusiones del análisis de sensibilidad al tamaño de malla en los siguientes puntos:

- Identificación de tres grupos de mallas: grandes ($> 30mm$), finas ($24-20mm$) y muy finas ($< 20mm$)
- Las mallas grandes presentan inestabilidades numéricas muy importantes, sobretodo en la rama post-elástica
- Las mallas finas presentan inestabilidades muy localizadas y reproducen fielmente el comportamiento clásico de rotura por cortante en losas: rama elástica con cambio de rigidez al aparecer las primeras micro-fisuras, rotura frágil y resistencia residual estable
- Las mallas muy finas presentan inestabilidades numéricas, debido a la sobre-localización de las bandas de fisuración, que introducen problemas de convergencia
- El motor de cálculo implícito parece muy adecuado para estimar la resistencia máxima (pico) de las losas con rotura a cortante, pues la rama elástica se

caracteriza con pocas inestabilidades en términos carga-desplazamiento y con una desviación estándar de los resultados muy aceptable para distintos tamaños de malla

- El motor de cálculo implícito no parece adecuado para estudiar el comportamiento post-elástico y la resistencia residual, pues presenta importantes inestabilidades y un coste computacional importante e imprevisible

Finalmente, cabe indicar que, después de los resultados presentados, se considera el tamaño de malla **$lc = 20mm$** para los futuros análisis de este trabajo. Esta malla nos permite garantizar una buena caracterización de los fenómenos físicos a un coste computacional razonable.

Influencia de la relación a/d

Una vez elegido el tamaño de malla adecuado, se está en condiciones de estudiar la influencia de la distancia carga-apoyo en el tipo de rotura. Debido a la disposición real de los aceros en las losas, podemos considerar $d = 95mm$. Se han estudiado las siguientes relaciones a/d : 7.89 (carga centrada); 7; 6; 5; 4; 3; 2.75; 2.5; 2.25; 2.

En este apartado analizaremos, principalmente, dos resultados. Por un lado, analizaremos las curvas carga-desplazamiento. Este análisis nos permitirá confirmar la correcta ejecución de las simulaciones a identificar las posibles inestabilidades. Por otro lado, analizaremos las cartografías de los esfuerzos principales máximos, es decir, de los esfuerzos de tracción. Estas cartografías nos permitirán observar el tipo de rotura.

En cuanto a las curvas carga-desplazamiento hemos decidido dividir las en dos gráficos, con el fin de apreciar correctamente los distintos casos. Estos se presentan en las siguientes figuras:

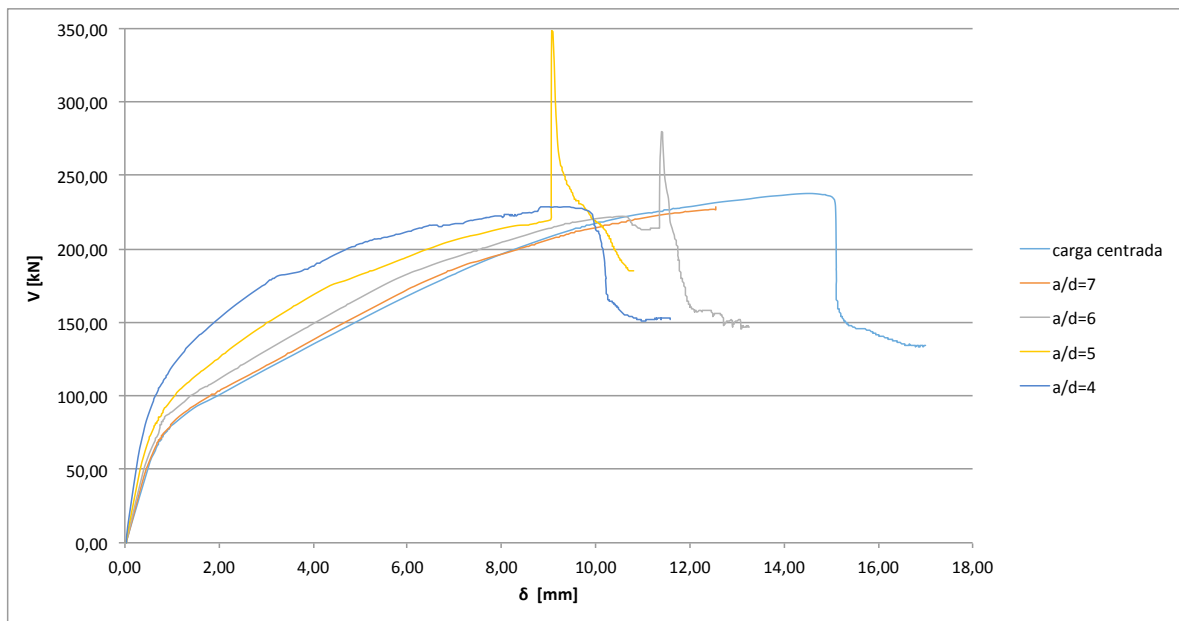


Figura 3.16: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos valores a/d - Rotura a flexión

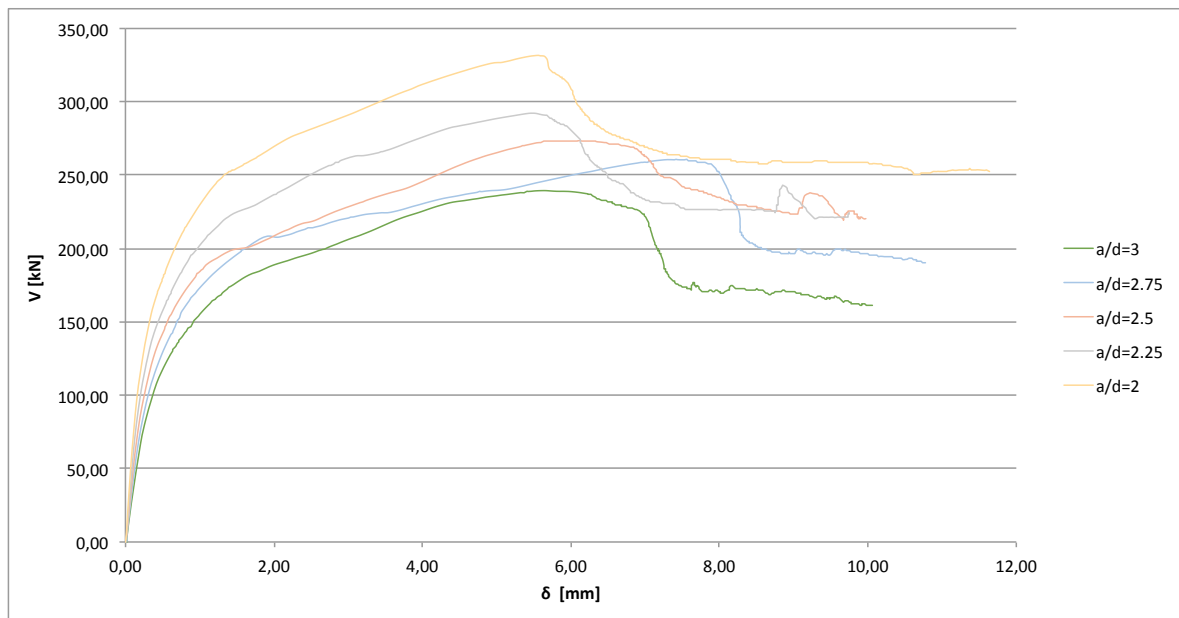


Figura 3.17: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos valores a/d - Rotura a cortante

De las gráficas anteriores podemos extraer diversas conclusiones. En primer lugar, cabe notar que, al igual que el estudio paramétrico de la malla, pocas simulaciones llegan a alcanzar el máximo desplazamiento definido (17mm). En particular, únicamente el caso con carga en el centro alcanza dicho valor. Esto nos confirma, conjuntamente con los análisis del tamaño de malla, que el desplazamiento máximo definido en nuestro modelo es demasiado importante y que, para futuras simulaciones, es pertinente reducirlo.

Otro comportamiento a destacar son las inestabilidades numéricas del motor implícito, principalmente para los casos de rotura a flexión (figura 3.16). De nuevo, observamos problemas de convergencia al inicio de la rama post-elástica, especialmente para valores a/d entre 7 y 5.

Al contrario que las simulaciones con rotura a flexión (casi) pura, observamos que la zona de transición entre la rotura a flexión y la rotura a cortante se caracteriza correctamente, sin presentar importantes inestabilidades (figura 3.17). La simulación de la rotura por cortante, para distintos valores de a/d , presenta un comportamiento parecido a las curvas experimentales: régimen elástico dividido en elástico lineal y elástico con microfisuras; rotura frágil del hormigón con una zona de máximo *smooth*; tendencia a estabilizar la resistencia en la rama post-elástica, esto es, la resistencia residual.

Si bien ciertas de las simulaciones anteriores contienen inestabilidades notables, el estudio bibliográfico y el análisis de las cartografías de esfuerzos principales máximos nos ha permitido dar por suficientes los resultados obtenidos. Por un lado, podemos considerar que la simulación a flexión pura (carga centrada) caracteriza correctamente la rotura de la losa. Por otro lado, debido que los resultados con $a/d = 4$ e inferiores reproducen fielmente el comportamiento físico real de este tipo de ensayos, se concluye que la zona de transición de rotura queda bien caracterizada.

Tal y como se ha introducido, para verificar las conclusiones de *Kani* en [46] utilizaremos las cartografías de resultados de los esfuerzos principales máximos, justo en el momento de carga máxima. Estos esfuerzos equivalen al esquema de tracciones, positivas para la convención adoptada en ABAQUS. En primer lugar, se puede verificar el correcto funcionamiento del modelo con la simulación de rotura por flexión pura. Representando la mitad de la losa en el momento de carga máxima obtenemos:

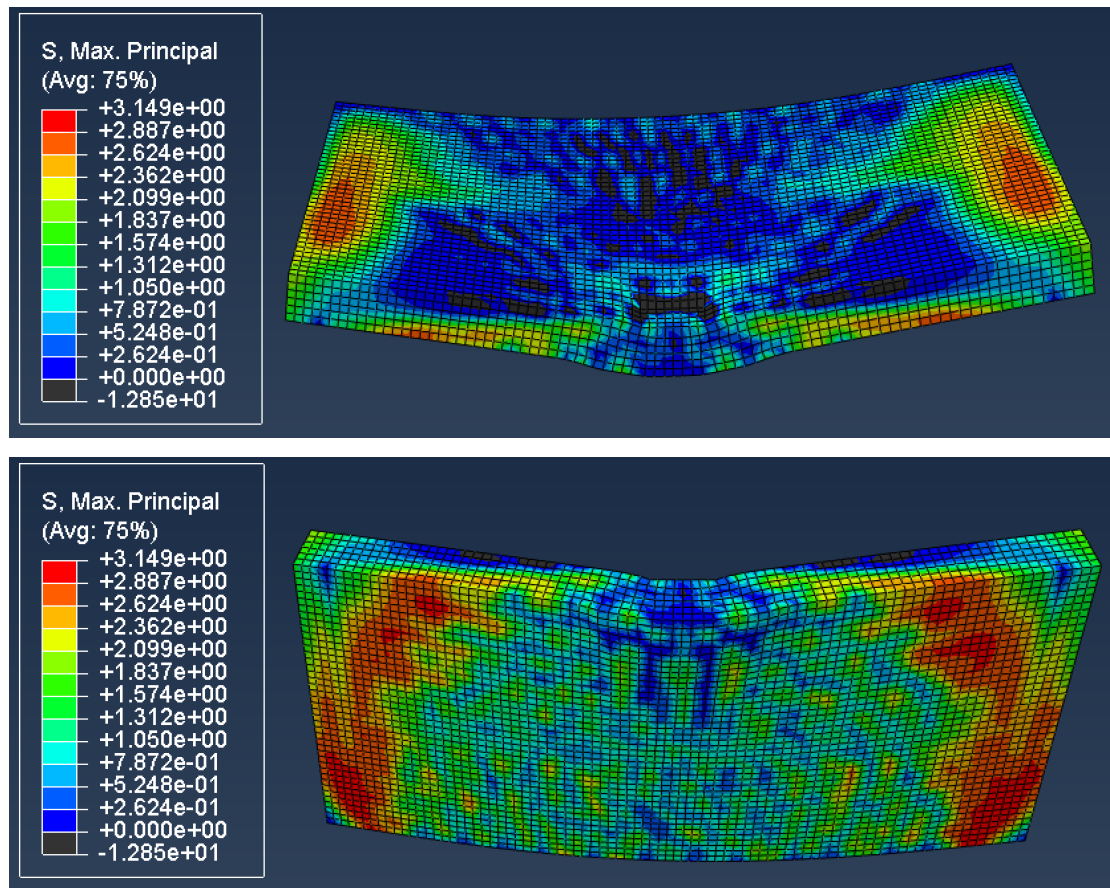


Figura 3.18: Tensiones principales máximas - Simulación con carga centrada

En efecto, se puede constatar que las tracciones se concentran en la cara inferior de la losa y las compresiones en la cara superior. Asimismo, podemos observar las líneas de fisura por flexión en el paramento inferior (líneas azules paralelas a los apoyos).

Para estudiar el cambio de tendencia en el tipo de rotura se presentan a continuación las cartografías de esfuerzos principales (tracciones) en el momento de carga máxima, para algunos casos de relaciones a/d . El conjunto de casos estudiados y sus cartografías correspondientes se pueden encontrar en el Anejo 3.

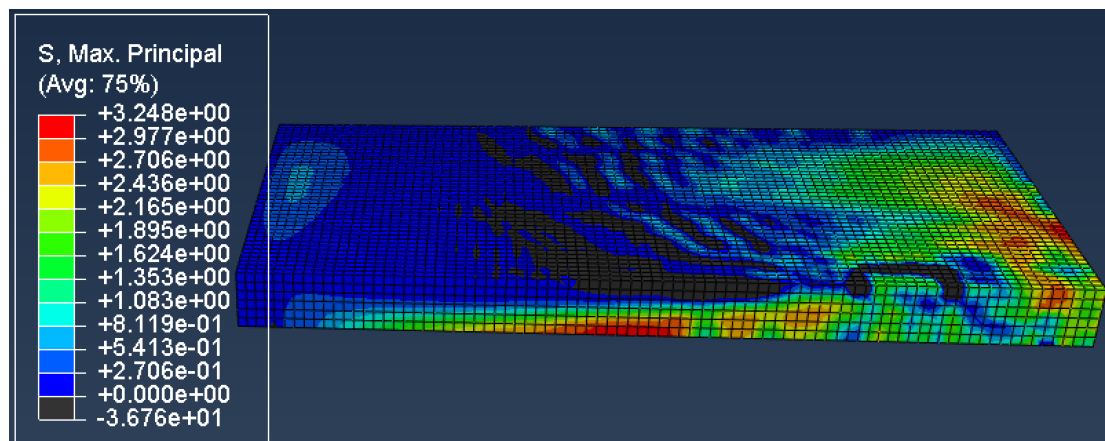


Figura 3.19: Tensiones principales máximas - Simulación con $a/d=3$

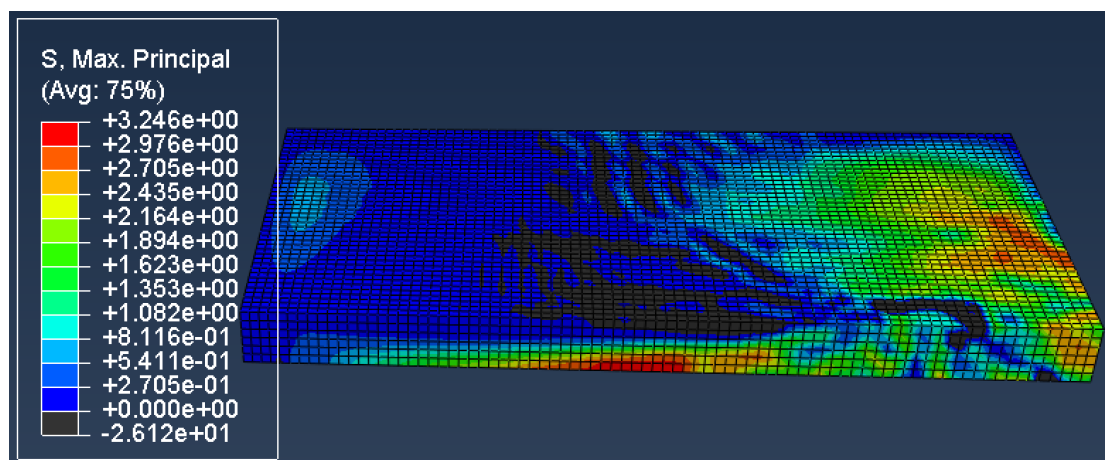


Figura 3.20: Tensiones principales máximas - Simulación con $a/d=2.5$

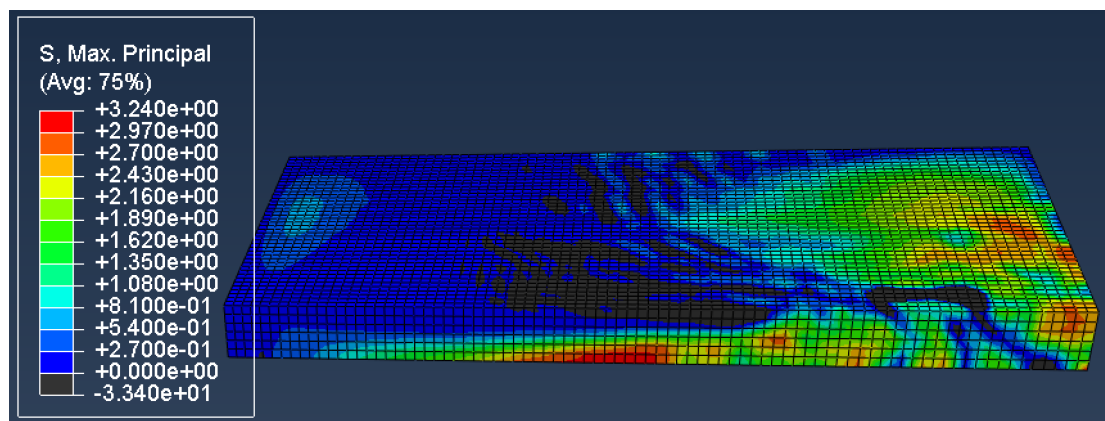


Figura 3.21: Tensiones principales máximas - Simulación con $a/d=2.25$

En las figuras anteriores se pueden asimilar los valores positivos a las tracciones en la losa y los valores azules oscuro o negros a las zonas de compresión. Así pues, se puede constatar que, para el caso $a/d=3$, se empieza a formar una biela de compresión entre la carga y el apoyo, tal y como habíamos anunciado la rotura a cortante en el capítulo 2 de este

trabajo. No obstante, no existe una conexión directa con una biela de compresión entre la zona de carga y el apoyo, pues la zona de compresión no es continua:

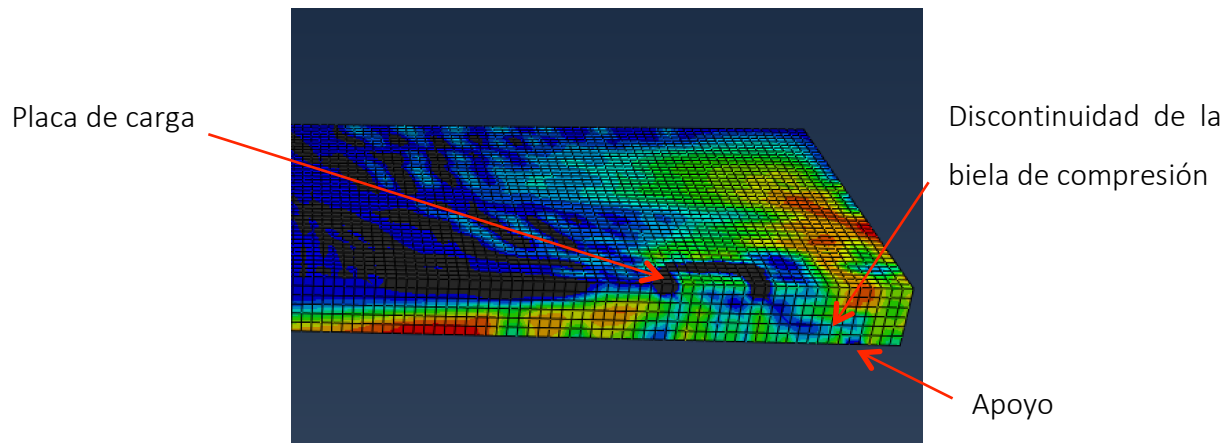


Figura 3.22: Tensiones principales máximas - Simulación con $a/d=3$ - Detalle de la rotura

La biela de compresión se empieza a esbozar de forma continua entre la placa de carga y el apoyo para $a/d=2.75$ (figura 3.20), confirmando la rotura por cortante de la losa sometida a carga puntual. Este comportamiento no hace más que confirmarse para las relaciones a/d inferiores, tal y como se observa en la figura 3.21.

Esquemáticamente, podemos resumir las conclusiones del análisis de sensibilidad de la distancia carga-apoyo en los siguientes puntos:

- Identificación de inestabilidades numéricas en la rama post-elástica para ciertas configuraciones de a/d , incluso con la malla previamente validada ($l_c=20mm$). Las simulaciones que presentan inestabilidades no forman parte de las configuraciones de interés de este trabajo, pues no presentan rotura por cortante. Siendo simulaciones de control, no se estudiarán dichas inestabilidades con mayor detalle
- La zona de transición entre rotura por flexión o rotura por cortante está bien caracterizada y los modos de rotura corresponden a la física real del problema
- Se observa que el límite de rotura a cortante se encuentra para valores de $a/d=2.75$. Estos valores son un poco mayores que los resultados presentados por Kani en [46], si bien son muy próximos. Así pues, se valida de nuevo el correcto comportamiento del modelo

Finalmente, cabe indicar que, después de los resultados presentados, se considera el tamaño de malla **$lc = 20mm$** y la relación **$a/d=2.5$** para los futuros análisis de este trabajo. Por un lado, la malla nos permite garantizar una buena caracterización de los fenómenos físicos a un coste computacional razonable. Por otro lado, la distancia carga-apoyo nos permite asegurar la rotura a cortante de la losa de estudio.

3.3.2 Resultados del modelo base

Una vez hemos definido las propiedades constitutivas del modelo, las características geométricas y de carga/apoyos, las posibilidades que nos ofrece ABAQUS para resolver numéricamente el modelo, el tamaño de malla y la distancia apoyo-carga; estamos en condiciones de presentar los resultados de lo que denominamos “modelo base”.

En primer lugar, con el fin de comprender la simulación desde un punto de vista macroscópico, observemos la curva carga-desplazamiento para el caso de estudio base:

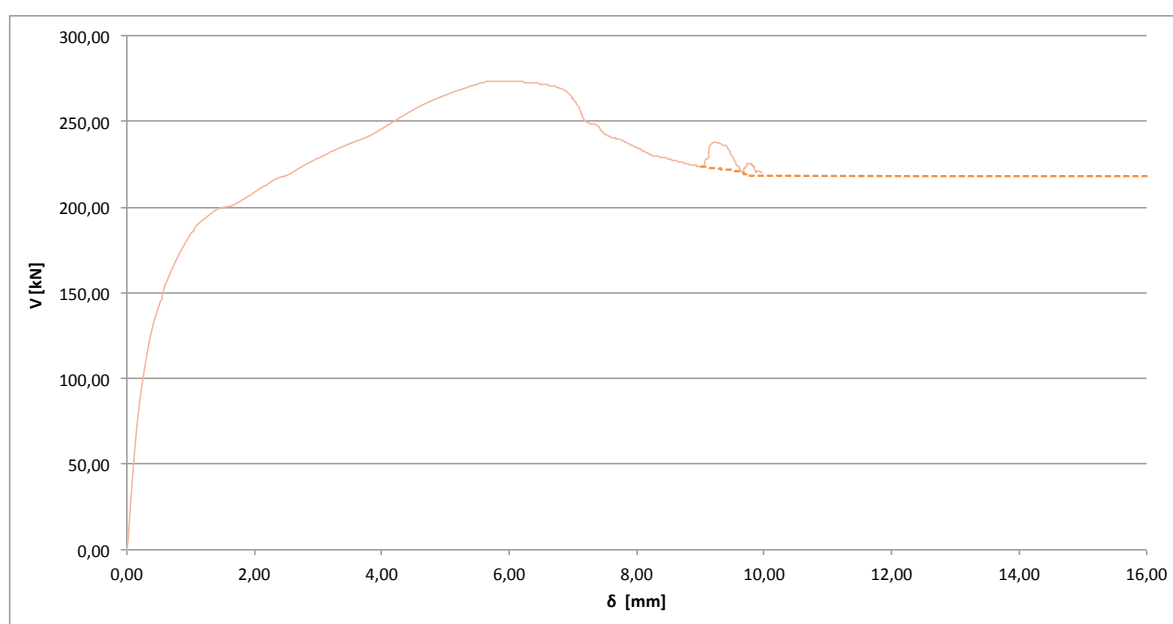


Figura 3.23: Curva Carga-Desplazamiento para el caso base - Malla 20mm - $a/d=2.5$

En la figura anterior podemos observar el comportamiento de la losa a lo largo del proceso de carga. En primer lugar, se desarrolla un comportamiento elástico lineal, hasta una carga de 100-120kN. A continuación, aparecen las primeras micro-fisuras en el hormigón, fruto de las zonas sometidas a esfuerzos de tracción crecientes. Estas micro-fisuras se traducen en un cambio en el comportamiento lineal elástico del hormigón, pues, a partir de

120kN, se puede constatar un cambio de rigidez en la reacción. Esto es propio del hormigón fisurado. Después, al alcanzar una carga máxima de 274kN, se produce la rotura de la losa. Se puede observar que el tipo de rotura es frágil, con una pérdida importante de tensión. Este comportamiento es característico de la rotura por cortante en losas de hormigón armado. Finalmente, se observa una estabilización de la resistencia post-pico o residual, comportamiento típico del hormigón armado post-ruptura.

Para observar el esquema de rotura a cortante de una losa ensayada en laboratorio, a veces, es necesario seccionar la losa con el fin de poder observar el patrón de rotura. La modelización de media losa en nuestros estudios numéricos nos permite observar dicho patrón de rotura a la perfección.

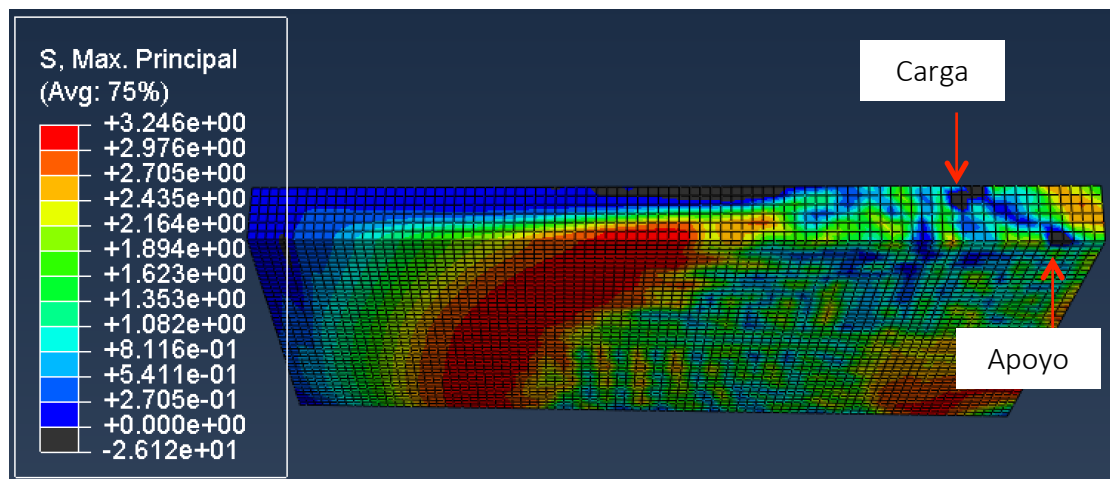


Figura 3.24: Tensiones principales máximas - Simulación del caso base - Cara inferior

En efecto, observando un corte a la mitad de la losa se puede observar, en el momento de la rotura, la biela de compresión entre la carga y el apoyo. Asimismo, si representamos las deformaciones plásticas en el momento de la rotura podemos identificar una clara separación geométrica en la losa, caracterizando la rotura por cortante:

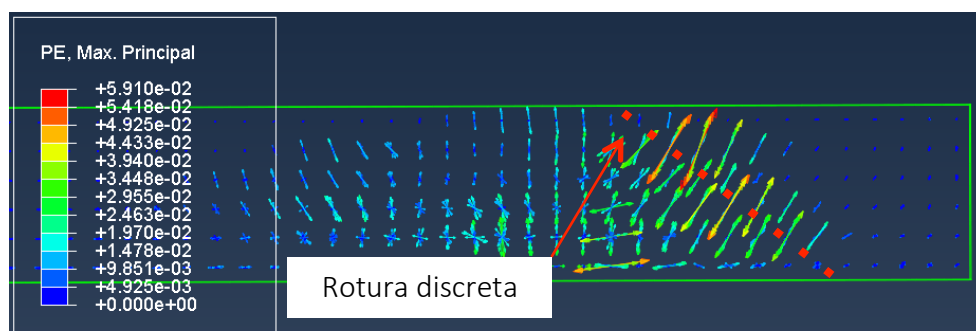


Figura 3.25: Deformaciones plásticas principales máximas - Simulación del caso base

En la figura 3.25 se puede observar como, en la zona de la fisura discreta generada por la rotura a cortante, el campo de deformaciones plásticas principales presenta una dirección perpendicular a dicha fisura. Este comportamiento nos permite confirmar la posición de la rotura por cortante, diagonal y entre la carga y el apoyo, así como la separación de los elementos de la losa después de la rotura, debido a la fractura discreta.

Otro aspecto importante a analizar es la pérdida de resistencia a tracción de la losa, debido a la propagación de fisuras en la cara inferior de la losa. En la figura 3.26 se puede observar el campo de tensiones principales máximas (tracciones) antes de la micro-fisuración, justo antes del cambio de pendiente en la curva carga-desplazamiento. En la figura 3.27 se puede observar la misma cartografía, pero para un instante posterior a la rotura de la losa.

Comparándolas, podemos constatar la evidente pérdida de resistencia a tracción en la cara inferior (transformación del color rojo en azul).

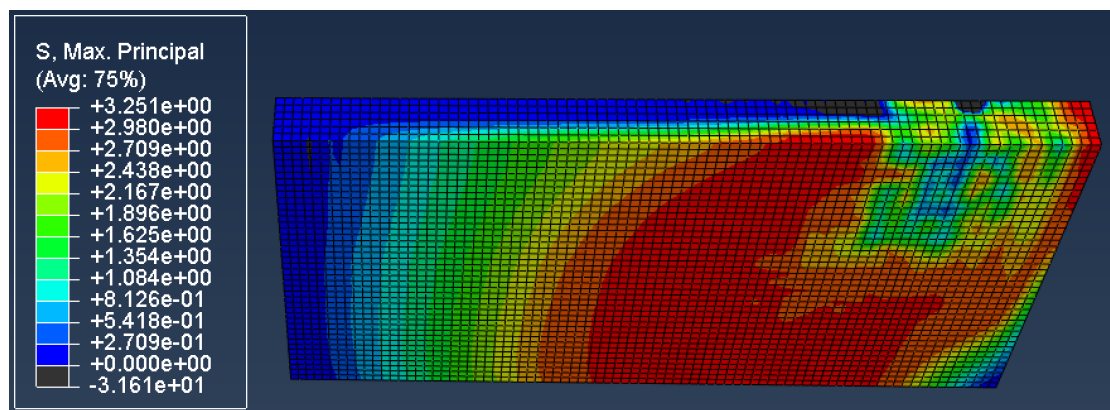


Figura 3.26: Tensiones principales máximas - Cara inferior - Estado de carga anterior a la micro-fisuración

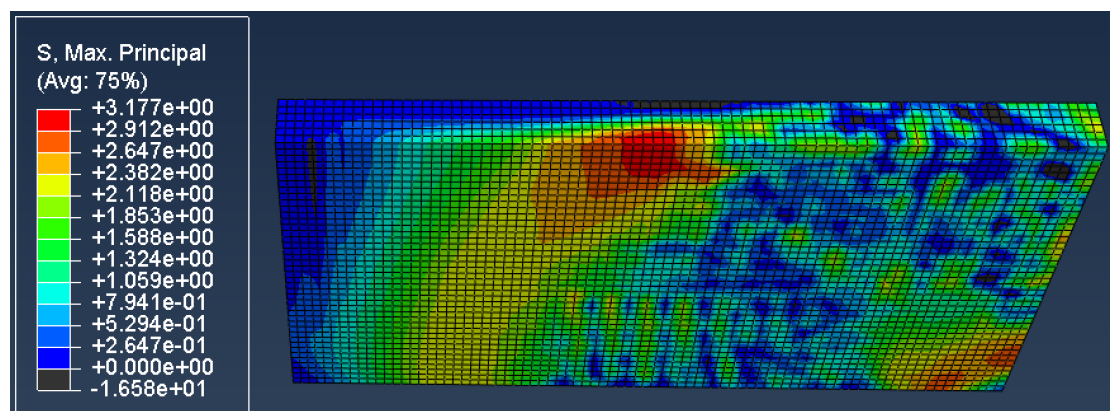


Figura 3.27: Tensiones principales máximas - Cara inferior - Estado de carga posterior a la rotura

Por último, es interesante observar el comportamiento que presentan los aceros longitudinales inferiores, estos son, los aceros que se disponen perpendicularmente a la línea de apoyos.

En la figura 3.28 se presenta el estado de tensiones (tracciones) de estos aceros. En esta imagen se puede observar como los aceros que se encuentran debajo de la placa de carga y en la zona de rotura (aceros inferiores en la imagen) están plastificados, pues han alcanzado la carga máxima de 500kN. Observando el histórico de la simulación, se ha podido comprobar que dichos aceros empiezan a plastificar mucho antes de la rotura de la losa. Más concretamente, empiezan a plastificar para una carga de 234kN, punto que coincide con las primeras micro-fisuras de la losa.

El hecho que la armadura plastifique a 234kN pero que, a su vez, se observe una rotura de la losa a 274kN pone de manifiesto la capacidad de redistribución de esfuerzos que tienen las losas sometidas a cargas puntuales, tal y como apuntábamos en el capítulo 2.

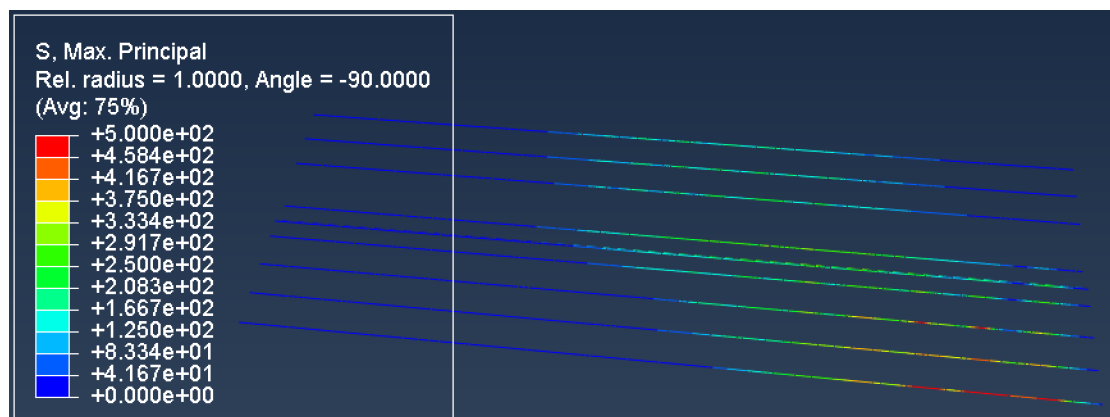


Figura 3.28: Tracciones en los aceros longitudinales inferiores - Estado de carga máximo

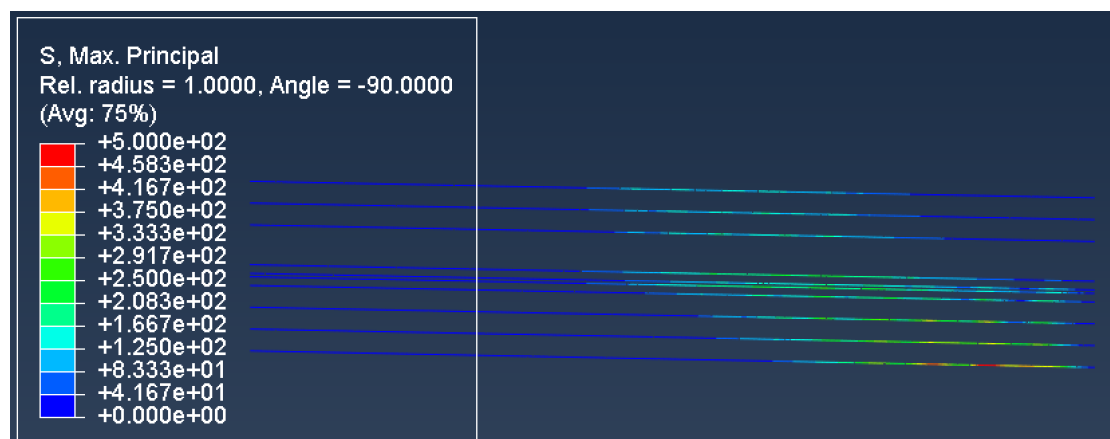


Figura 3.29: Tracciones en los aceros longitudinales inferiores - Estado de carga que presenta el inicio de las plastificaciones (234kN)

3.3.3 Comparación modelo-normativa

Este apartado tiene por objetivo comparar sucintamente los resultados obtenidos a partir de la simulación “base” realizada con las cargas límites propuestas por las dos normativas introducidas en §2.3.1 y §2.3.2. Asimismo, compararemos el decalaje entre la simulación-normativa con respecto a los ensayos y análisis presentados en §2.3.3.

El detalle de los cálculos se puede encontrar en el anejo 2 de este trabajo. Los resultados obtenidos para una relación $a/d=2.5$ son:

	Resistencia a cortante (kN)	V_{ABAQUS}/V_{norma}
ABAQUS	273,67	-
EN 1992-1-1	167,53	1,63
ACI 318M-14	157,65	1,74

Tabla 3.3: Comparación normativa-simulación para las cargas máximas de rotura

De la tabla 3.3 podemos constatar que la resistencia a cortante obtenido con MEF es superior a aquella propuesta por las normativas [24] y [25]. Esta infra-valorización de las normativas con respecto a los resultados numéricos está en línea con las conclusiones presentadas en §2.3.3.

Comparando el ratio $V_{ABAQUS}/V_{EN\ 1992-1-1}$ con los ratios obtenidos experimentalmente por *Lantsoght* en [18], cabe indicar que nuestros resultados se aproximan más a los valores propuestos por la normativa. Recordando los valores presentados en la tabla 2.5, *Lantsoght* obtuvo un ratio experimental/normativa de 2.38 (a comparar con 1.63 para nuestras simulaciones).

Comparando los resultados obtenidos con los análisis presentados en [3] por *Terras*, se observan ordenes de magnitud y tendencias muy similares. Por un lado, se puede constatar que nuestros resultados presentan un orden de magnitud similar a aquellos recogidos en la figura 2.23 por *Terras*. Por otro lado, obtenemos la misma tendencia con relación a la comparación entre normativas: el *Eurocódigo* hace una mejor predicción de la carga última que el *ACI*. En efecto, nótese que hemos obtenido un ratio $V_{ABAQUS}/V_{EN\ 1992-1-1} = 1.63$, contra un ratio $V_{ABAQUS}/V_{ACI\ 318M-14} = 1.74$.

3.4 RESUMEN

En este capítulo se ha introducido el Método de los Elementos Finitos. Además, hemos introducido los principales motores de cálculo que propone ABAQUS, a saber, el esquema de resolución *implícito* y *explícito*. Hemos comprendido sus ventajas e inconvenientes, y, finalmente, hemos escogido un método de cálculo para realizar las simulaciones que se han presentado en el capítulo.

A continuación, hemos definido los parámetros necesarios para comprender el modelo numérico en toda su complejidad. Por un lado, hemos presentado las características geométricas de la losa y de sus armaduras, así como las condiciones de apoyo y de carga. Por otro lado, hemos explicado extensamente los modelos constitutivos utilizados para simular el hormigón armado.

Se ha podido comprobar que las simulaciones para modelos de elementos finitos no-lineales presentan una gran complejidad y requieren de la definición de múltiples hipótesis y definiciones con el fin de representar fielmente la realidad.

Por último, hemos presentado los resultados obtenidos para las distintas simulaciones realizadas sin tracciones en el plano. En primer lugar, nos hemos interesado a estudiar la sensibilidad del modelo al tamaño de malla. A continuación, hemos estudiado la influencia de la distancia carga-apoyo en el tipo de rotura, interesándonos a estudiar la zona de transición entre una rotura por flexión y una rotura a cortante. Una vez definida la malla y la distancia carga-apoyo, hemos analizado cualitativamente el modelo “base”. Esto nos ha permitido entender el fenómeno de la rotura por cortante en MEF en toda su complejidad. Por último, hemos comparado los resultados obtenidos a los valores propuestos por las normativas y los ensayos presentados en el capítulo 2.

Centrándonos en el análisis de los resultados presentados en este capítulo, podemos resumir las conclusiones en los siguientes puntos:

- La resistencia a cortante máxima obtenida es de 273.67 kN.
- La resistencia a cortante resultante de la simulación es un 63% mayor a la estimación del *Eurocódigo* [24] y un 74% a la estimación del *ACI* [25]. Esta supra-

estimación de las normativas observada coincide con otros autores presentados previamente.

- Las armaduras empiezan a presentar plastificación para cargas de 234 kN, a un 85% de la carga de rotura de la losa. Esto demuestra la capacidad de redistribución de esfuerzos que presentan las losas.
- A partir de las cartografías de las tensiones principales máximas y del campo de deformaciones plásticas principales máximas, podemos observar el plano de rotura a cortante que se dibuja en el modelo. Esto confirma la capacidad del modelo para capturar la fenomenología del problema.
- El método de resolución implícito parece un motor robusto y adecuado para estimar la carga máxima del ensayo. Sin embargo, el estudio paramétrico del tamaño de malla y de la relación a/d ha puesto de manifiesto que este método de cálculo pueden presentar inestabilidades, más o menos importantes, al caracterizar la rama post-elástica del problema.

4 Efecto de las tracciones en la resistencia a cortante en losas

Una vez hemos establecido los parámetros y las condiciones necesarias para obtener un modelo base que funcione correctamente, estamos en condiciones de estudiar la parte prospectiva y, en cierto modo, el objetivo final de este trabajo: la reducción de resistencia a cortante en losas sometidas a cargas puntuales, debido a la aplicación de cargas uniaxiales en el plano.

En este capítulo, en primer lugar, se introducirán las condiciones suplementarias que debemos considerar en el modelo con el fin de simular las tracciones en el plano.

A continuación, realizaremos una comparación entre el motor de cálculo *implícito* (usado en el capítulo 3) y el *explícito* (usado para el presente capítulo). Esta comparación nos permitirá sentar las bases necesarias para analizar los resultados obtenidos de las simulaciones con tracciones en el plano.

Por último, presentaremos y analizaremos los resultados obtenidos de las simulaciones de losas de hormigón armado sometidas a una carga puntual con $a/d=2.5$ y tensiones en el plano.

4.1 CONSIDERACIONES ADICIONALES PARA LA SIMULACIÓN

Tal y como se ha introducido en §2.3.3, las tracciones se aplican en la losa a través de barras *Dywidag* de $\varnothing 25\text{mm}$. Estas barras se encuentran embebidas en el interior de la losa. En su parte interior, están ancladas mediante placas metálicas que, además, permiten repartir los esfuerzos de tracción en la losa, con el fin de evitar las concentraciones de esfuerzos y las roturas inesperadas durante el ensayo. En su parte exterior, las barras sobresalen de la losa, permitiendo la tensión de estas y, con ello, la aplicación de los esfuerzos de tracción. El mecanismo se puede entender con profundidad por medio de los planos presentados en el Anejo 1. A título ilustrativo:

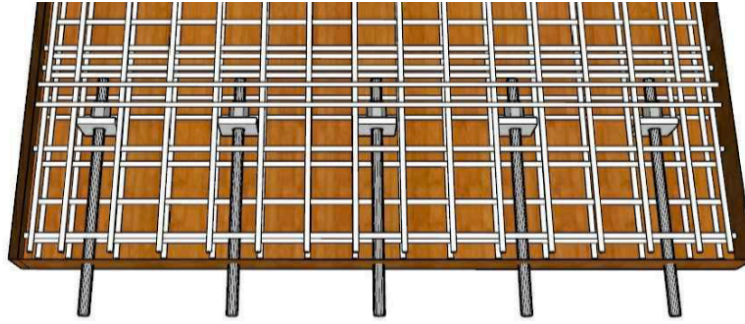


Figura 4.1: Barras Dywidag en la losa

Con el fin de utilizar el modelo de base presentado previamente, se ha evitado la modelización de las barras *Dywidag* y de las placas de acero que transmiten las tracciones. Simplificando el problema, se ha aplicado una carga uniformemente repartida en un área equivalente a las placas de transmisión, en la misma posición que estas se deberían encontrar, en el interior del hormigón.

La aplicación de estas cargas uniformes en el interior del modelo, requiere de ciertas especificaciones e hipótesis. En primer lugar, se genera la malla de todo el modelo. Creada la malla, se observa que elementos de la malla quedan en el interior de las posiciones teóricas de las placas al extremo de los *Dywidag*. Una vez se han identificado los elementos finitos (elementos del interior de la losa) que coinciden con la posición de las placas, se aplica una carga uniformemente repartida a este conjunto de elementos. Esquemáticamente:

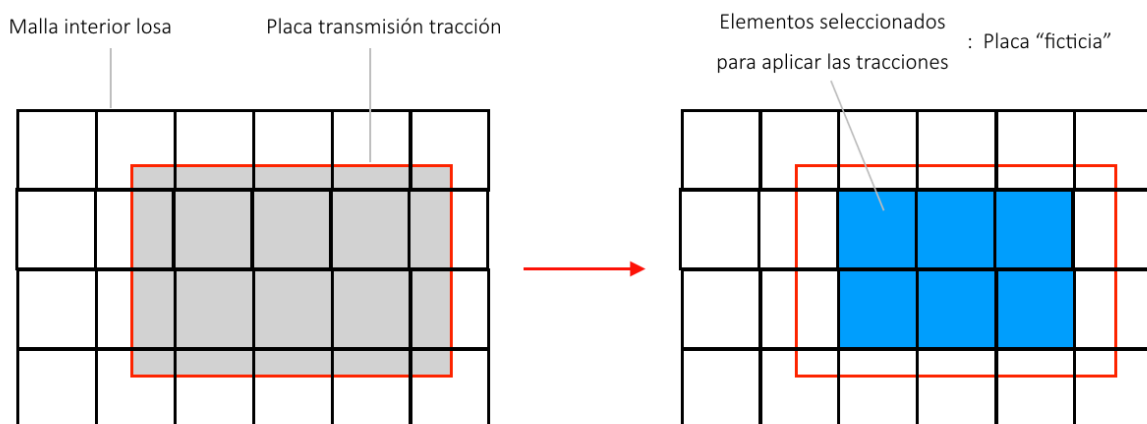


Figura 4.2: Esquema explicativo para la aplicación de las tracciones en el modelo

Cabe destacar que la superficie de aplicación de las tracciones puede diferir, según la malla utilizada, del tamaño exacto de la placa de transmisión. No obstante, si bien el área de

aplicación de la carga es importante, el parámetro fundamental que define el ensayo es la tracción que soporta la barra *Dywidag*, pues es el parámetro que se controlará experimentalmente en el laboratorio. Con el fin de aplicar correctamente la carga de tracción, se reparte la carga límite a tracción entre el conjunto de la superficie ficticia existente, asegurando una distribución uniforme entre las múltiples barras y las múltiples placas.

La tracción total aplicada en el conjunto de barras *Dywidag* se describe como porcentaje de la carga límite de fisuración a tracción. Esta se calcula sumando las contribuciones del hormigón y de los aceros que se encuentran en la dirección de las tracciones:

$$T_{fis} = \left\{ h \cdot L + \frac{E_s}{E_c} \cdot 16 \cdot S_{fi12} \right\} \cdot f_{ctm} = 666.021 \text{ kN} \quad (4.1)$$

Así pues, la carga uniformemente repartida en el interior del hormigón se calcula como:

$$P = \frac{T_{fis}}{\sum S_i} \quad (4.2)$$

Donde " S_i " es el área de la placa ficticia número "i".

4.2 COMPARACIÓN ENTRE MOTORES DE CÁLCULO

En esta sección se compararán los motores de cálculo que propone ABAQUS para la resolución de problemas cuasi-estáticos, el *implícito* y el *explícito*. El objetivo es evaluar la diferencia de comportamiento entre ambos métodos y cuantificar los eventuales decalajes.

Este objetivo viene motivado por dos puntos. Por un lado, este trabajo pretende sacar a la luz eventuales diferencias en la reacción de la losa en función del esquema de cálculo utilizado. Esto puede ser de gran ayuda para el trabajo de investigación que se está llevando a cabo en el Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la ETSICCP. Por otro lado, se considera importante cuantificar la diferencia de carga máxima resistente que presentan ambos métodos de resolución. En el futuro, en función de los resultados experimentales, esta evaluación podría justificar el uso de un esquema de resolución u otro.

Para comparar *ABAQUS/Implicit* y *ABQUS/Explicit* nos centraremos en el análisis de las curvas carga-desplazamiento, ya sea en su forma como en la carga máxima. Para compararlos, hemos realizado las mismas simulaciones con ambos motores de cálculo. Con el fin de realizar un análisis de sensibilidad, se han simulado los múltiples casos de relaciones a/d presentados en §3.3.1. Los resultados obtenidos para el esquema de resolución *explícito* son:

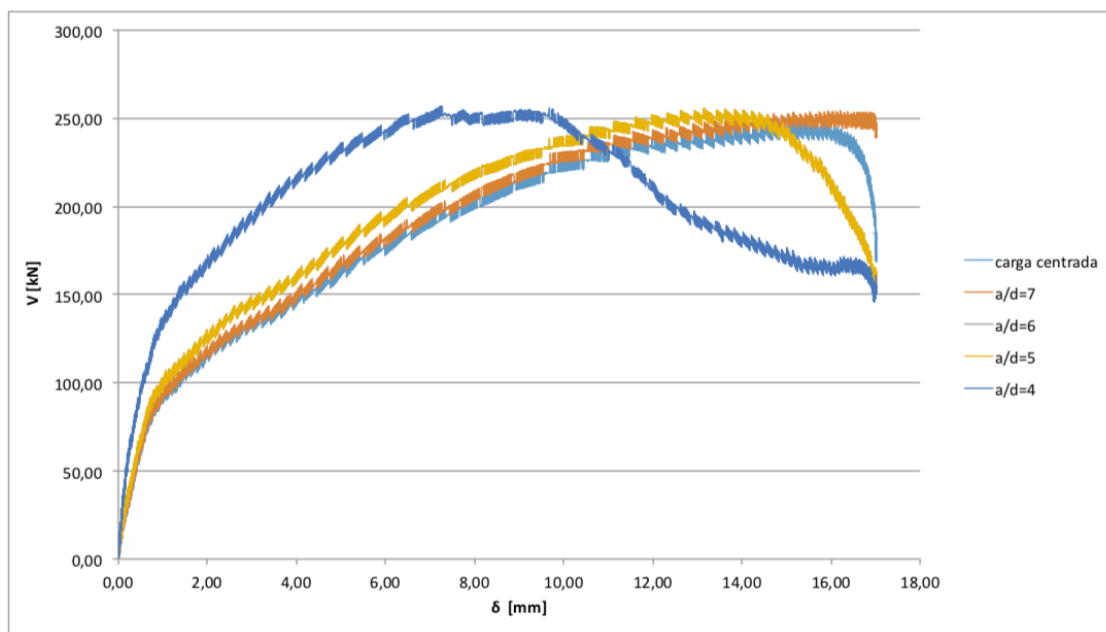


Figura 4.3: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos valores a/d - Rotura a flexión - Motor explícito

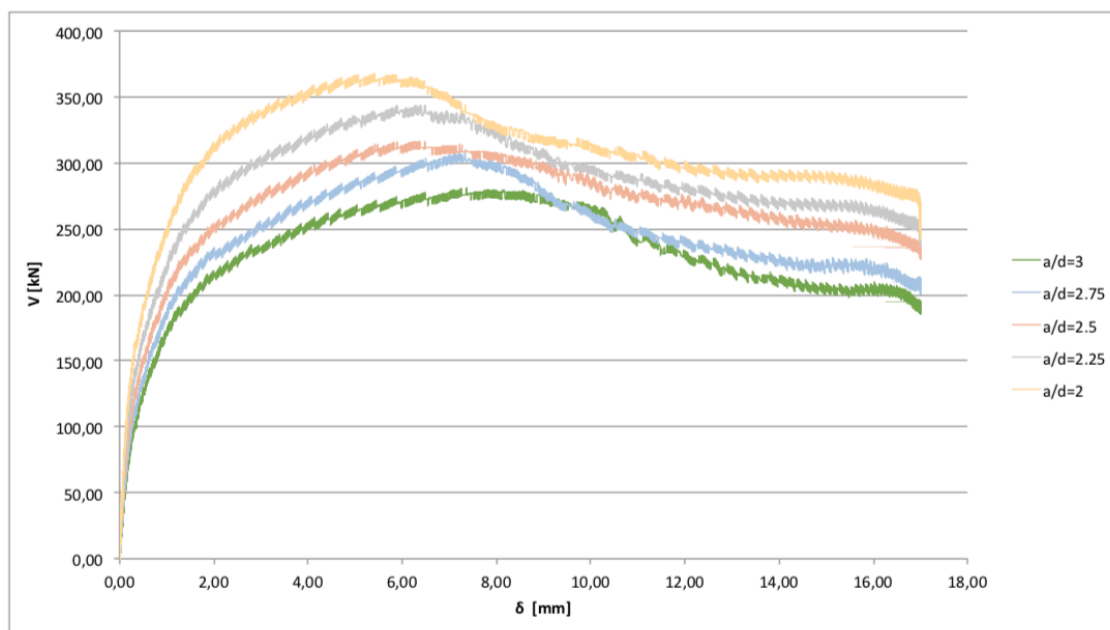


Figura 4.4: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos valores a/d - Rotura a flexión - Motor implícito

Si comparamos las figuras precedentes con sus homólogas, las figuras 3.16 y 3.17, podemos extraer diversas conclusiones.

En primer lugar, cabe destacar la presencia de inestabilidades locales en las curvas resultantes de las simulaciones con el método *explícito*. En efecto, en las figuras 4.3 y 4.4 podemos observar un cierto “ancho de respuesta” en las curvas carga-desplazamiento. En cierto modo, se obtienen distintos valores de la respuesta en términos de carga para un mismo desplazamiento. Este “ancho de respuesta” se puede evaluar a alrededor 2-5 kN, y se debería considerar si se estiman valores medios de respuesta o la carga máxima.

Desde un punto de vista macroscópico, se puede constatar que el método *explícito* no presenta grandes inestabilidades o picos en la rama post-elástica. En este sentido, comparando estas curvas con la figura 3.16, podemos concluir que el método *explícito* parece una opción más adaptada para caracterizar los comportamientos post-ruptura.

Otro aspecto interesante es la respuesta de la losa en el momento de la rotura y, en parte, la caracterización que realizan ambos motores de cálculo. En cuanto a las roturas por flexión, comparando las figuras 3.16 y 4.3, podemos observar que ambos métodos presentan comportamientos similares. No obstante, comparando 3.17 y 4.4, se puede constatar un ligero cambio en el tipo de rotura. Si bien ambas simulaciones presentan roturas frágiles, este comportamiento es menos extenuado para los resultados presentados con esquemas de resolución explícitos. En efecto, la figura 4.4 (*explícito*) presenta roturas a cortante poco frágiles, incluso ligeramente dúctiles para ciertos casos a/d; mientras la figura 3.17 (*implícito*) presenta roturas claramente frágiles. Este análisis está directamente condicionado por los factores de escala de las distintas gráficas, pero la tendencia es clara.

Por último, es fundamental estudiar la diferencia que presentan ambos métodos con relación a la resistencia a cortante. En la tabla 4.1 se recogen los resultados obtenidos para los distintos casos de estudio a/d. En esta podemos constatar que el método *explícito* presenta estimaciones de la carga máxima, de media, un **13%** mayores a las del método *implícito*. La caracterización de dicho decalaje deberá tenerse presente en las futuras comparaciones de estos modelos con los valores experimentales.

	Implícito	Explícito	Expl./Impl.
Carga centrada	237,78	245,35	1,03
a/d = 7	-	251,89	-
a/d = 6	222,22	253,12	1,14
a/d = 5	-	253,12	-
a/d = 4	228,50	254,49	1,11
a/d = 3	239,49	278,63	1,16
a/d = 2.75	260,62	305,71	1,17
a/d = 2.5	273,67	313,68	1,15
a/d = 2.25	292,27	341,15	1,17
a/d = 2	331,70	364,97	1,10
	Media	1,13	
	Desv. Stand.	0,047	

Tabla 4.1: Comparación entre métodos de resolución numéricos para las cargas máximas de rotura

En vista de las conclusiones expuestas anteriormente, si bien observamos ciertas diferencias entre el método de resolución *explícito* e *implícito*, el comportamiento del método *explícito* parece estable y adecuado para nuestro caso de estudio. Asimismo, cabe destacar que una simulación con este motor tiene un coste computacional de 30 minutos. Comparando este coste con el del motor *implícito*, este esquema de resolución parece muy adecuado para las simulaciones con tracciones en el plano.

4.3 RESULTADOS

Una vez verificado el correcto funcionamiento del método *explícito*, estamos en condiciones de simular los múltiples casos de losas de hormigón armado sometidas a cargas puntuales y tracciones en el plano presentando rotura por cortante. Esto es, añadir tracciones al modelo base previamente definido en §3.3.2.

En esta sección presentaremos los resultados de dichas simulaciones, así como una comparación entre los resultados obtenidos y los valores que proponen las normativas enunciadas.

Con el fin de estudiar en profundidad el efecto de las tracciones a la resistencia a cortante, se han simulado losas con distintos niveles de carga, definidas como porcentaje de la carga T_{fis} (4.1). Más concretamente, se ha estudiado el rango de valores de 0% a 150% de la tensión límite (T_{fis}), con incrementos de 10%.

4.3.1 Resultados del modelo con tracciones

Para familiarizar al lector con el efecto de las tracciones en los ensayos que se han simulado, es interesante empezar el análisis con las curvas carga-desplazamiento y con la evolución de la resistencia a cortante.

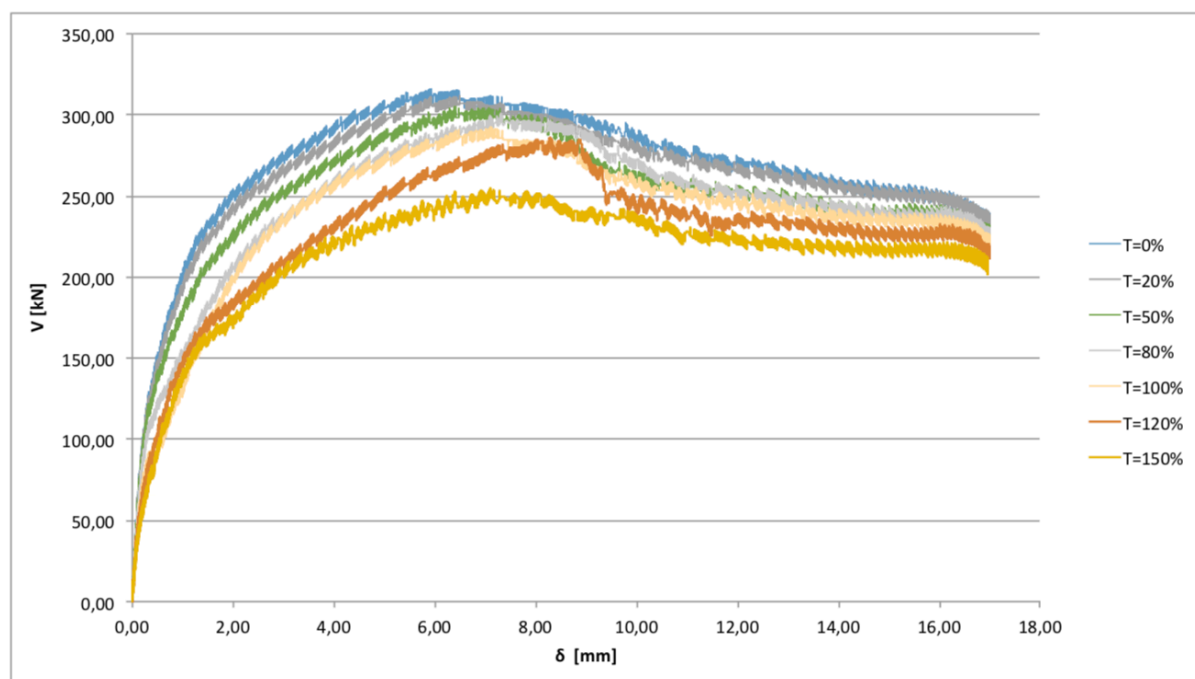


Figura 4.5: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos niveles de tracción en el plano

	V: Carga máxima (kN)	V/V _{ref}	% Pérdida V
T=0% de T _{fis}	314,89	1	-
T=10% de T _{fis}	312,10	0,99	0,89%
T=20% de T _{fis}	309,81	0,98	1,62%
T=30% de T _{fis}	307,25	0,98	2,43%
T=40% de T _{fis}	304,41	0,97	3,33%
T=50% de T _{fis}	301,81	0,96	4,15%
T=60% de T _{fis}	299,73	0,95	4,81%
T=70% de T _{fis}	297,50	0,94	5,52%
T=80% de T _{fis}	297,19	0,94	5,62%
T=90% de T _{fis}	303,27	0,96	3,69%
T=100% de T _{fis}	288,64	0,92	8,34%
T=110% de T _{fis}	285,74	0,91	9,26%
T=120% de T _{fis}	282,64	0,90	10,24%
T=130% de T _{fis}	279,80	0,89	11,14%
T=140% de T _{fis}	250,42	0,80	20,48%
T=150% de T _{fis}	248,61	0,79	21,05%

Tabla 4.2: Carga máxima para cada uno de los modelos con distintos niveles de tracción estudiados

La figura 4.5 y la tabla 4.2 servirán de base para los análisis de esta sección, pues se partirá de ellos para enunciar las principales conclusiones y para analizar los resultados.

En primer lugar, los elementos anteriores nos permiten enunciar uno de los principales resultados de estas simulaciones: las tracciones contenidas en el plano disminuyen la carga máxima a cortante que pueden soportar las losas sometidas a cargas puntuales. En efecto, esto se puede observar en las curvas de la figura 4.5 y en los valores de la tabla 4.2, donde V_{ref} hace referencia a la carga máxima del modelo base sin tracciones ($T=0\%$).

Asimismo, junto con la reducción de la resistencia, se puede observar un aumento de la flecha asociada con la carga límite conforme se aumenta el nivel de tracciones. Esto se puede observar en la figura 4.5, donde las curvas con mayores tensiones en el plano presentan su pico para desplazamientos más importantes. No obstante, este fenómeno no se puede extrapolar a todo el rango estudiado. Se constata que, para las simulaciones con $T > 120\% T_{fis}$, la flecha asociada a la carga máxima se reduce (véase curva $T=150\% T_{fis}$).

Si bien la reducción de la capacidad a cortante con el aumento de las tracciones en el plano es una tendencia clara, es de especial interés caracterizarla. En la siguiente figura se representan los puntos de la última columna de la tabla 4.2.

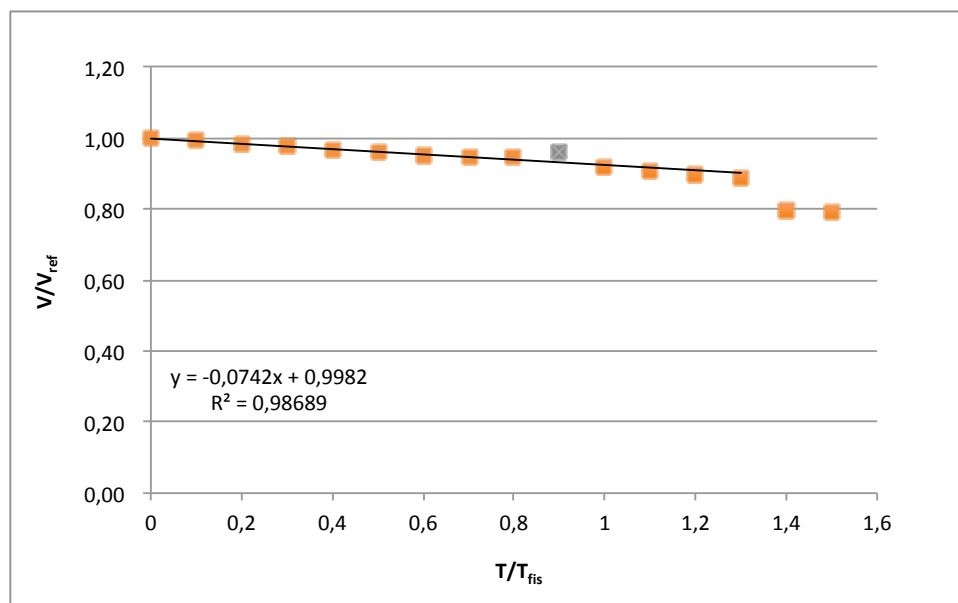


Figura 4.6: Ajuste lineal de T/T_{fis} para $T \leq T_{fis}$

De la figura 4.6 se pueden extraer, principalmente, dos conclusiones. Por un lado, se puede observar una reducción lineal de la resistencia a cortante conforme se aumentan las tracciones aplicadas, para valores de $T \leq T_{fis}$. Esta tendencia se puede extender incluso para valores $T \leq 1,3 T_{fis}$. Por otro lado, se observa una clara ruptura de este comportamiento lineal para valores $T > T_{fis}$. Más precisamente, observamos una clara discontinuidad en la reducción

de la carga máxima para $T=1.3 T_{fis}$ y $T=1.4 T_{fis}$, donde hay un salto en la línea de tendencia. Esta discontinuidad es debida a la plastificación prematura de las armaduras debido a la aplicación de fuertes tracciones en el plano, tal y como se puede observar en la tabla 4.4 y en las figuras 4.13 y 4.14.

Para cuantificar la reducción de resistencia a cortante que se ha obtenido para las distintas simulaciones, es necesario representar el gráfico Carga máxima - Tracciones en el plano. Excluyendo la simulación $T=0.9 T_{fis}$, obtenemos:

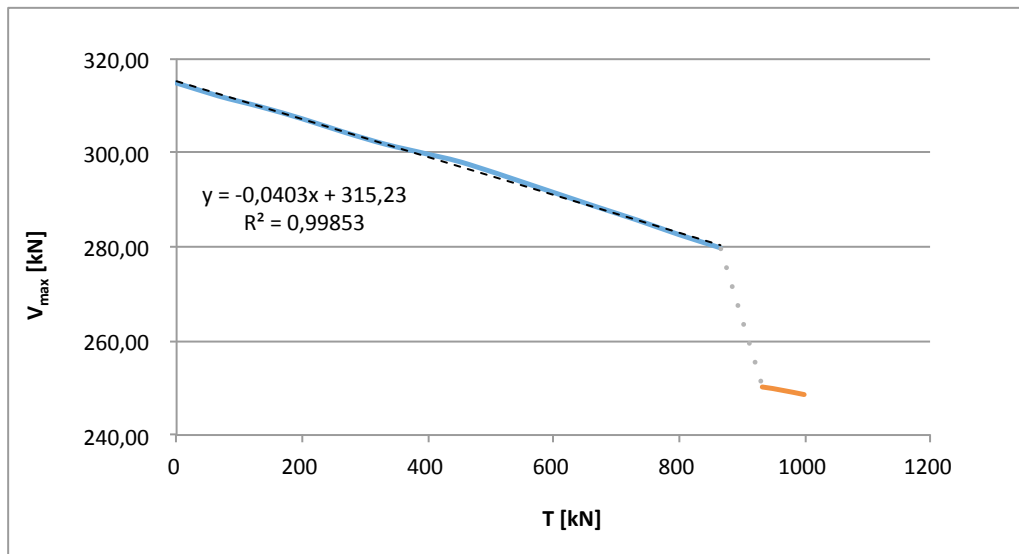


Figura 4.7: Resistencia a cortante en función de las tracciones en el plano aplicadas - Línea azul, simulaciones $0\%T_{fis}$ - $130\%T_{fis}$; Línea naranja, simulaciones $140\%T_{fis}$ - $150\%T_{fis}$

A partir de la figura 4.7, se puede estimar la reducción de la resistencia a cortante al **4.03%**. Así pues, a título de ejemplo, para un aumento de 100kN de las tracciones en el plano, la resistencia a cortante de la losa se reduce 4.03 kN.

Otro aspecto interesante a analizar son los estados tensionales “macroscópicos” de la estructura, es decir, las evoluciones de las fases elástica y post-elástica conforme se aumenta el nivel de tracciones en el plano. En lo que respecta las rigideces que caracterizan el régimen elástico-lineal y el post-elástico, se puede observar que estas no cambian para valores $T \leq T_{fis}$, pues la inclinación de las curvas $V-\delta$ es la misma para distintos niveles de tracciones. Estas rigideces, una vez superada la tensión límite, empiezan a presentar ciertas reducciones. Este fenómeno se puede observar especialmente comparando el caso $T=1.2 T_{fis}$ y $T=1.5 T_{fis}$, en la zona próxima a la rotura (parte derecha de la figura 4.7).

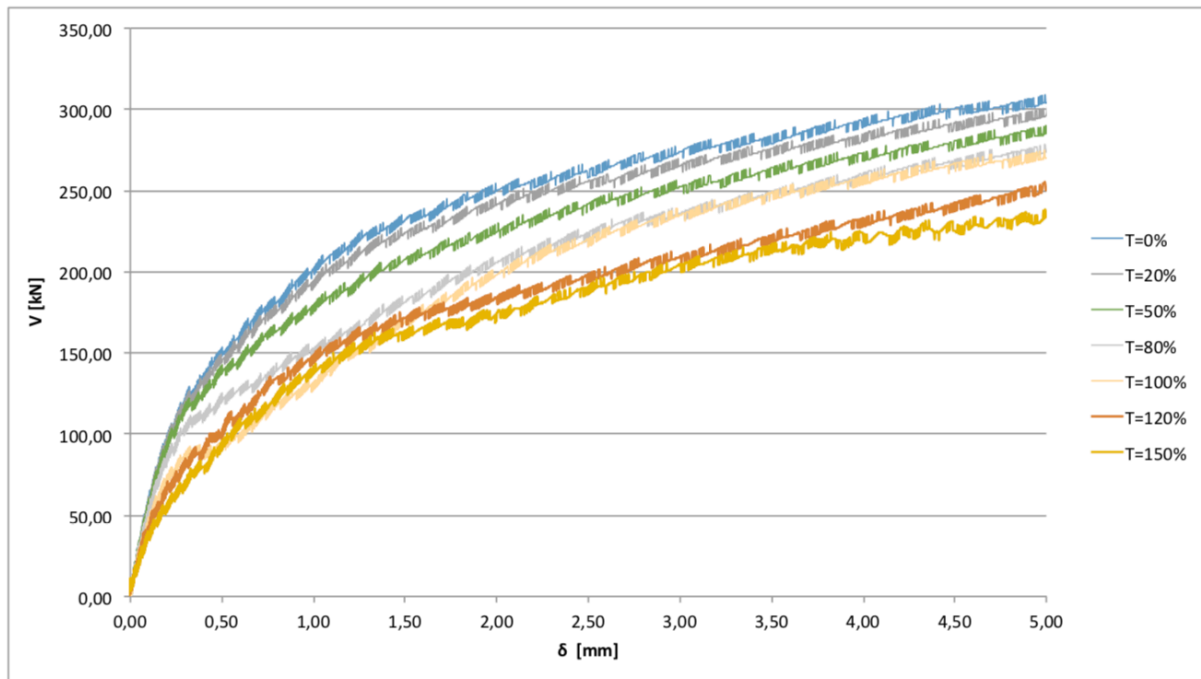


Figura 4.8: Curvas Carga-Desplazamiento para distintos niveles de tracción en el plano - Rama elástica

En efecto, se puede observar como la simulación con $T=1.5T_{fis}$ empieza a presentar, para $\delta > 3.5\text{mm}$, una reducción en la rigidez post-fisuración.

La figura 4.8 nos permite evaluar detalladamente la evolución de la rama elástica en función de los niveles de tracción en el plano. Más concretamente, nos interesamos a la evolución del punto de inflexión de la zona elástica-lineal, esto es, el momento donde aparecen las primeras fisuras y se observa un cambio de rigidez en la reacción de la losa. Recuperando las informaciones necesarias se constata que la carga de fisuración evoluciona, aproximadamente, según la siguiente tabla:

	0% T_{fis}	50% T_{fis}	100% T_{fis}	150% T_{fis}
Carga fisuración	125 kN	100 kN	50 kN	0 kN

Tabla 4.3: Cargas de fisuración asociadas a los respectivos casos de tracción en el plano

De la tabla anterior y de la figura 4.8, se puede concluir que el aumento de las tracciones en el plano reduce la carga de fisuración de las losas, reduciendo la zona elástica. Asimismo, para valores importantes de tensiones ($T=1.5T_{fis}$) se observa una completa desaparición del régimen elástico.

Esta reducción del régimen elástico se puede observar físicamente en las losas, al analizar el estado de deformaciones plásticas en el momento que aparecen las primeras fisuras en el hormigón:

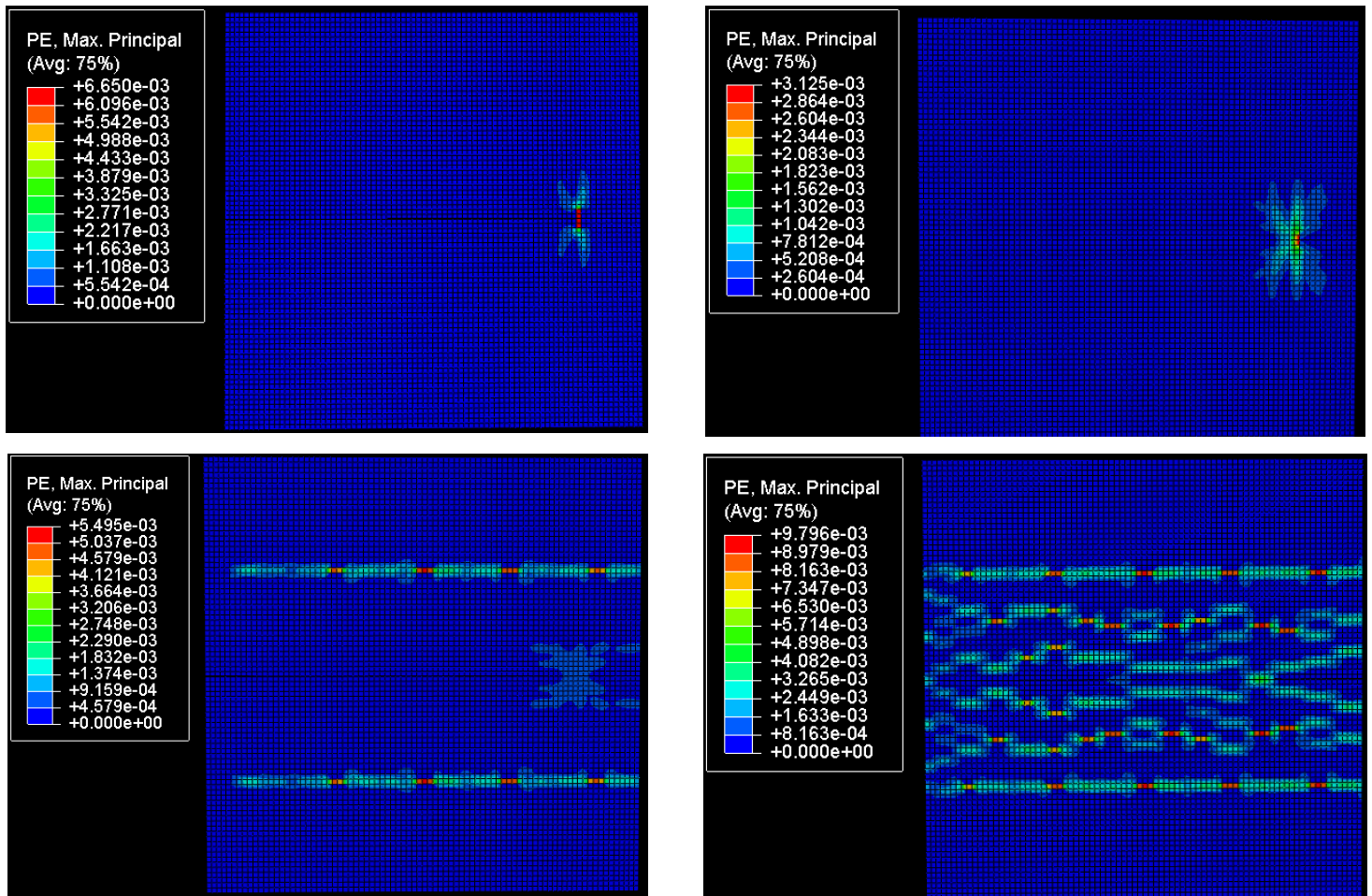


Figura 4.9: Deformaciones plásticas máximas (tracciones) en la cara inferior para el momento en que se inicia la fisuración - Simulaciones con tracciones de $0\%T_{fis}$, $50\%T_{fis}$, $100\%T_{fis}$ y $150\%T_{fis}$ (de izquierda a derecha y de arriba abajo)

En efecto, en la figura anterior podemos constatar que las losas alcanzan el final de la rama elástica con estados de deformación-tensión muy distintos, en función de la fuerza axial aplicada en el plano. Para los casos con mayores tracciones (T_{fis} y $1.5T_{fis}$), se pueden observar fisuras discretas a lo largo de la losa, en la dirección perpendicular a las tracciones. La primera línea de fisuras coincide con la posición de las placas que soportan las barras *Dywidag*, incrustadas en el hormigón. Para los casos con menores tracciones ($0T_{fis}$ y $0.5T_{fis}$), estas fisuras longitudinales desaparecen por completo, aumentando la zona de respuesta elástica que presenta la losa.

Esta reducción de la zona elástica se podría intuir desde el inicio del ensayo, pues las fisuras longitudinales que presentan los casos con mayores tracciones en el plano se constituyen en el inicio del ensayo, justo después de la fase de tesado de las barras *Dywidag*:

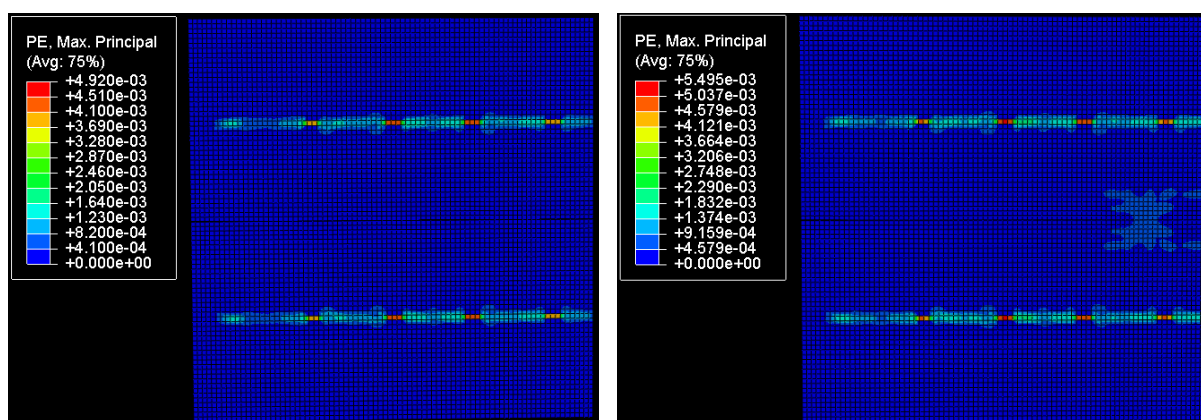


Figura 4.10: Deformaciones plásticas máximas (tracciones) en la cara inferior para el modelo $100\%T_{fis}$ - Inicio del ensayo (izquierda) y inicio de la rama post-elástica (derecha)

En cuanto a las cartografías de tensiones principales, estas nos permiten comprobar el buen funcionamiento del modelo y el mecanismo de rotura de las distintas simulaciones.

Por un lado, en la figura 4.11 se pueden observar las tensiones principales máximas (tracciones) para el momento en que se inicia el ensayo, justo después de terminar la fase de tesado de las barras *Dywidag*. Estas imágenes nos permiten verificar el correcto comportamiento del modelo. En primer lugar, se puede verificar que, para la simulación con $0.5T_{fis}$, el hormigón no llega a alcanzar su límite a tracción. No obstante, para la simulación con $1T_{fis}$, el estado tensional que presenta el hormigón en el centro de la losa corresponde a la carga máxima a tracción que este puede soportar (alrededor de 3.2MPa). Este comportamiento verifica la correcta aplicación de las fuerzas de tracción, pues para el caso con carga axial límite, el hormigón alcanza su estado límite. Por último, se puede constatar, en la simulación con $1.5T_{fis}$, que el hormigón ha perdido su capacidad de resistencia a tracción, debido que se ha superado su carga límite T_{fis} .

Nótese que la parte inferior de las imágenes en la figura 4.11 corresponde al borde donde se aplican las tracciones. El borde superior corresponde al eje de simetría de la losa.

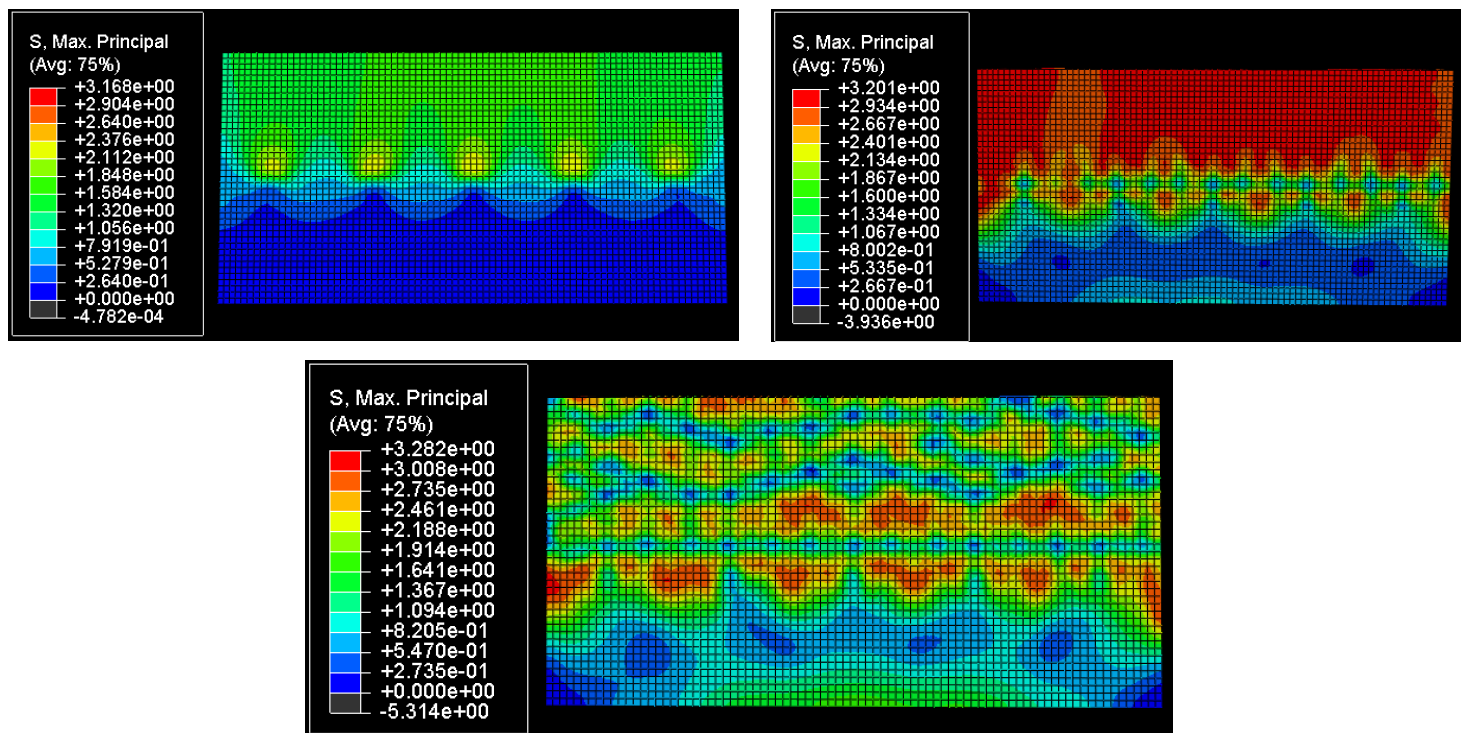


Figura 4.11: Tensiones principales máximas en la cara inferior después del tesado - Simulaciones con tracciones de $50\%T_{fis}$, $100\%T_{fis}$ y $150\%T_{fis}$ (de izquierda a derecha y de arriba abajo)

Por otro lado, las cartografías de tensiones principales nos permiten verificar el modo de rotura de la losa para los distintos niveles de tracciones en el plano.

El objetivo es, en una primera instancia, verificar que la losa presenta una rotura a cortante, para los distintos casos de tensión axial simulados. En ese sentido, la figura 4.12 nos permite verificar dicho postulado. Al igual que las observaciones realizadas en §3.3.2, se puede constatar la formación de una biela de compresión directa entre la carga y el apoyo. Verificando el campo de deformaciones plásticas en el momento de carga máxima, se ha podido comprobar que dicha biela es el motivo de la rotura frágil de la losa de estudio, tal y como demostramos en §3.3.2 (figura 3.24 y 3.25).

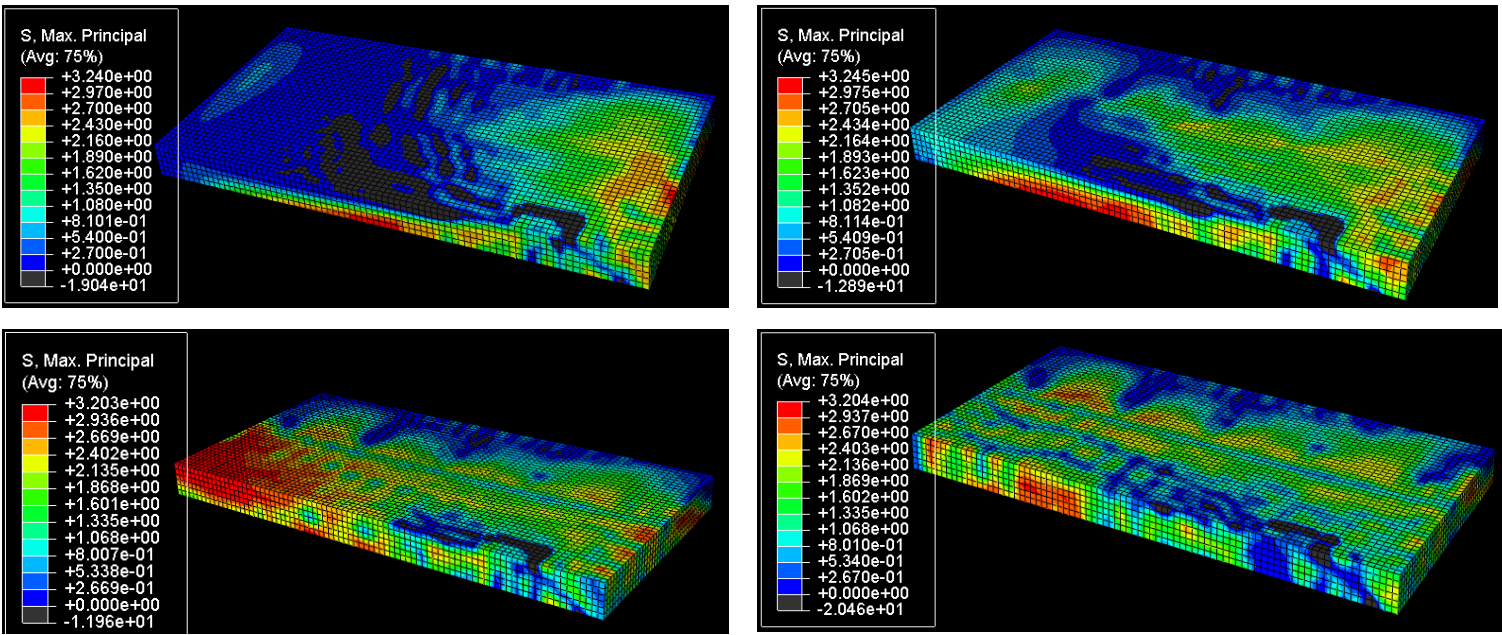


Figura 4.12: Tensiones principales máximas en la cara superior y en el plano medio para el momento de carga máxima - Simulaciones con tracciones de $0\%T_{fis}$, $50\%T_{fis}$, $100\%T_{fis}$ y $150\%T_{fis}$ (de izquierda a derecha y de arriba abajo)

Otro aspecto interesante a analizar es el comportamiento de las armaduras a lo largo de la simulación. Debido a la aplicación de tracciones en el plano, las armaduras en esta dirección presentan un estado tensional particular, en función del nivel de tensión aplicado. Para el inicio del ensayo (después del tesado), las armaduras transversales presentan las siguientes tracciones máximas:

	$0\% T_{fis}$	$50\% T_{fis}$	$100\% T_{fis}$	$150\% T_{fis}$
Tensión aceros	0 kN	140 kN	195 kN	340 kN

Tabla 4.4: Tensión máxima en las armaduras transversales al final del tesado, para los respectivos casos de tracción en el plano

Se observa que, en ningún caso, los aceros alcanzan su límite de resistencia (500 MPa) debido a las tracciones en el plano inicialmente aplicadas. Sin embargo, los esfuerzos axiales aplicados imponen un estado tensional no despreciable a las armaduras transversales.

En el momento de la rotura, las armaduras en la dirección traccionada presentan plastificación, principalmente en las zonas próximas a la rotura a cortante. Esta plastificación localizada se ha podido observar para todas las simulaciones, independientemente del nivel de tracciones en el plano aplicadas.

En cuanto a las armaduras longitudinales se puede observar que, en el momento de carga máxima, estas también presentan plastificaciones. Así pues, concluimos que, al igual que el caso base presentado anteriormente, las simulaciones de este capítulo nos permiten confirmar la capacidad de redistribución de las losas.

El conjunto de estos comportamientos se puede observar en las siguientes figuras:

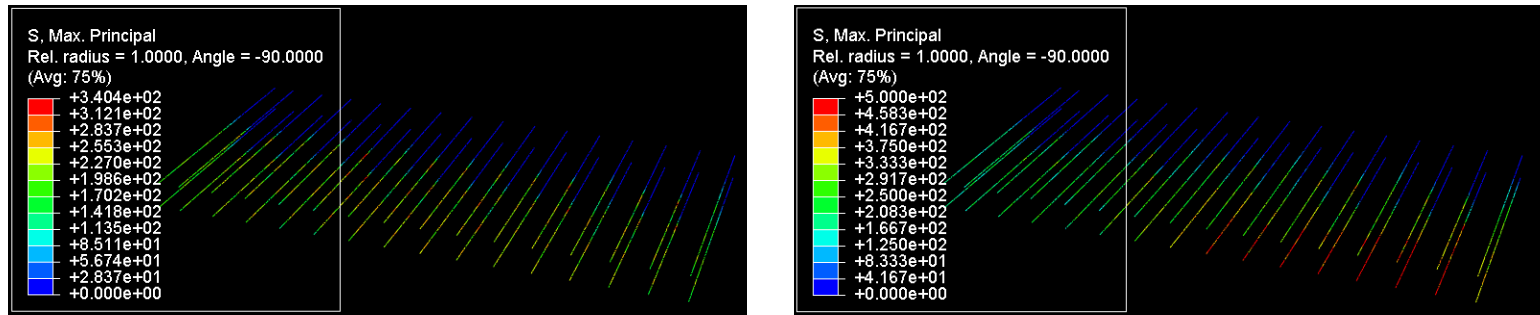


Figura 4.13: Tensiones principales máximas en los aceros transversales para el modelo 150% T_{fis} - Inicio del ensayo (izquierda) y momento de carga máxima (derecha)

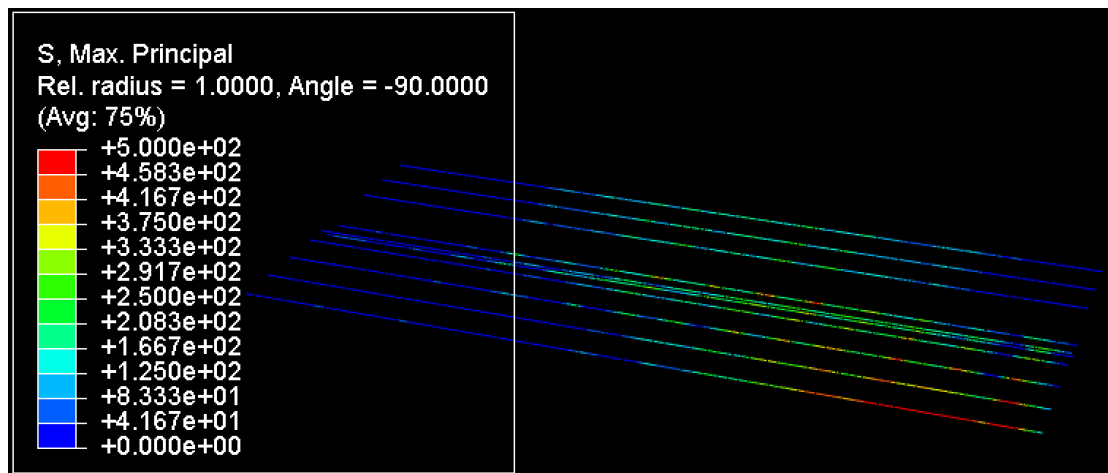


Figura 4.14: Tensiones principales máximas en los aceros longitudinales para el modelo 150% T_{fis} - Momento de carga máxima

Por último, el análisis de las deformaciones plásticas en la cara inferior de la losa para el momento de carga máxima nos permite entender el patrón de fisuración en el momento de la rotura. En la figura 4.15 se puede observar que, para mayores niveles de tracción en el plano, la zona fisurada y el ancho efectivo solicitado aumentan, así como el ancho de fisura. Además, se puede constatar que las fisuras siguen la dirección de las armaduras y de la placa de carga, pues presentan un patrón cuadrícula.

En la figura 4.15 se representa el conjunto de la losa, sin considerar el eje de simetría. Las partes superior e inferior de la figura corresponden a los bordes traccionados.

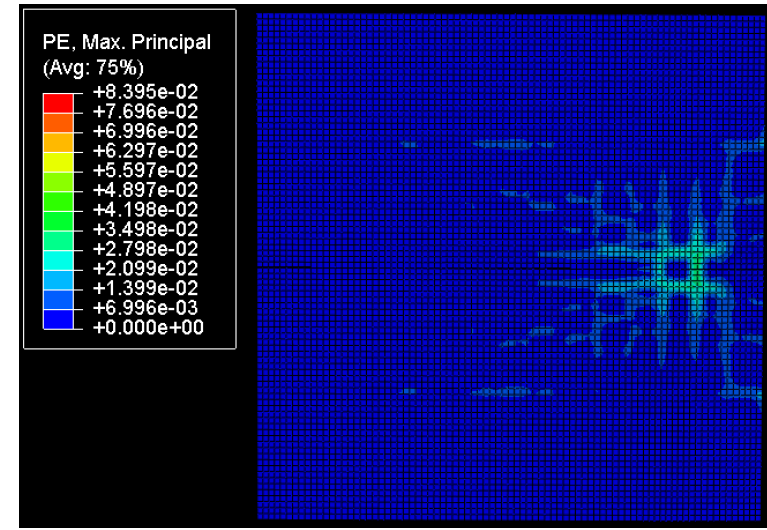
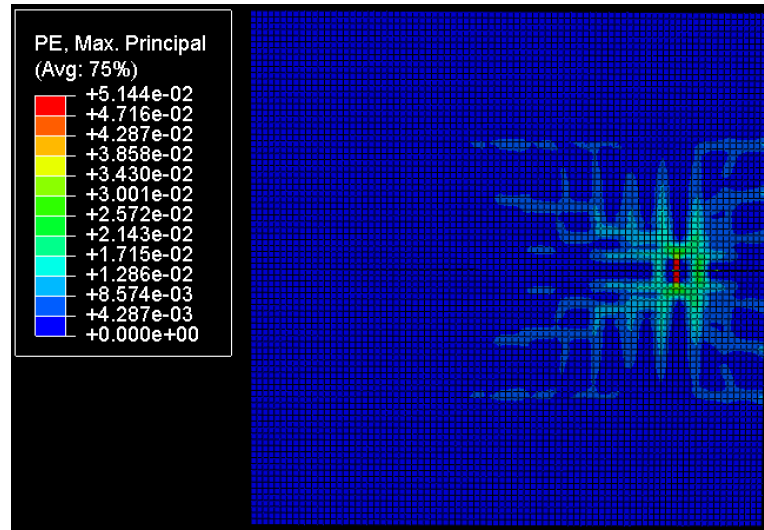
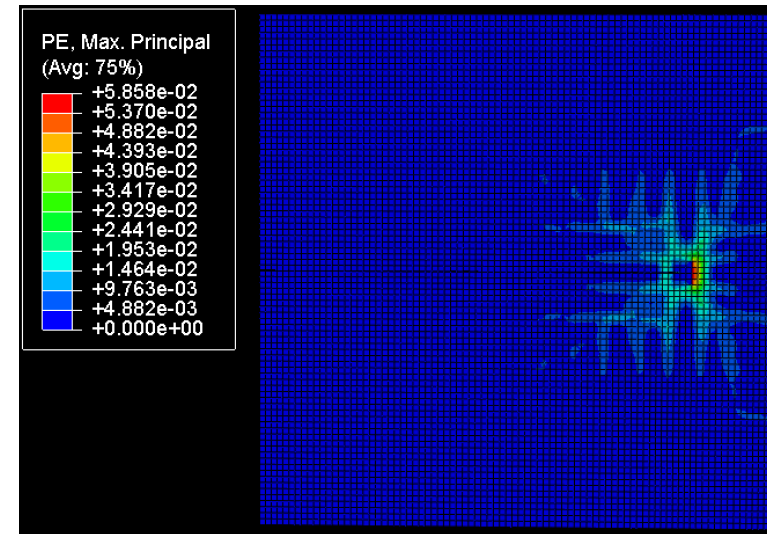
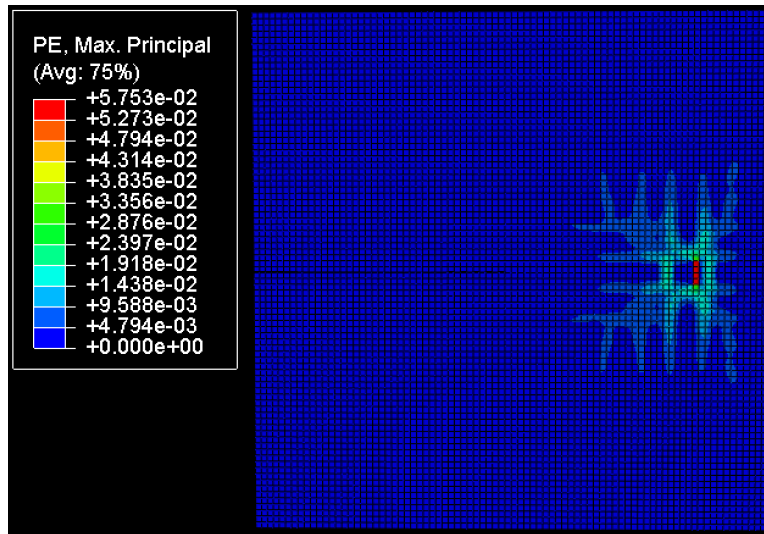


Figura 4.15: Deformaciones plásticas máximas (tracciones) en la cara inferior para el momento de carga máxima - Simulaciones con tracciones de $0\%T_{fis}$, $50\%T_{fis}$, $100\%T_{fis}$ y $150\%T_{fis}$ (de izquierda a derecha y de arriba abajo)

4.3.2 Comparación modelo-normativa

El objetivo de este apartado es comprar los resultados obtenidos numéricamente con los valores que proponen las normativas introducidas. Por ello, es importante recuperar las fórmulas presentadas en §2.3 y su significado físico. Más concretamente, nos fijaremos en la fórmula (2.2) del *Eurocódigo* (§2.3.1) y la fórmula (2.13) del *ACI* (§2.3.2).

$$V_{Rd,c} = \max \left\{ \begin{array}{l} [C_{Rd,c} \cdot k \cdot (100\rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} + k_1 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d \\ [v_{min} + k_1 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d \end{array} \right. \quad (2.2)$$

$$V_c = 0.17 \left(1 + \frac{N_u}{3.5A_g} \right) \lambda \sqrt{f'_c} \cdot b_w d \quad (2.13)$$

Las fórmulas enunciadas están basadas en experimentos en vigas, presentando una flexión unidireccional y una tracción longitudinal. Así pues, la dirección del plano de rotura a cortante y la dirección de la tracción coinciden. Las fórmulas se pueden extender a losas en ciertos casos, aunque no es recomendable para comportamientos bidireccionales.

En el capítulo 3 se han utilizado las fórmulas (2.2) y (2.13) para comparar los resultados numéricos a la normativa, si bien las condiciones de apoyo y de carga ya prescribían un comportamiento bidireccional en la losa de estudio. No obstante, el modo de aplicación de las tracciones en el plano para las simulaciones presentadas añade una nueva condición de contorno que dista, de nuevo, del caso ideal descrito por las fórmulas que nos proporciona la normativa.

En efecto, para la losa simulada, las tracciones se aplican en una dirección perpendicular a la línea de apoyos. En consecuencia, las tensiones en el plano y la superficie de rotura a cortante presentan direcciones perpendiculares.

Si bien las fórmulas propuestas por el *Eurocódigo* y el *ACI* no se adaptan a nuestra configuración de estudio, las utilizaremos para evaluar el límite de aplicación de dichas formulaciones. Esto nos permitirá confirmar o desestimar el uso de (2.2) y (2.13) para el caso de losas bidireccionales sometidas a tracciones perpendiculares a la dirección de la rotura a cortante.

En primer lugar, evaluemos la formulación propuesta en el *ACI 318M-14*. La consideración de las tracciones en el plano está definida por el término $“1 + \frac{N_u}{3.5A_g}”$, donde N_u es la fuerza normal a la que se somete la sección de estudio en Newtons, negativa para esfuerzos de tracción. Así pues, este término se puede describir como $“1 + \frac{a \cdot T_{fis}}{3.5A_g}”$, donde a corresponde a las múltiples simulaciones realizadas (0%-150%). Considerando el caso con $10\%T_{fis}$, obtenemos:

$$\frac{N_u}{3.5A_g} = \frac{10\%T_{fis}}{3.5A_g} = \frac{0.1 \cdot 666021}{3.5 \cdot 198000} = -0,177 \rightarrow V_c < 0 \quad (4.3)$$

Tal y como se puede constatar en (4.3), aplicando la formulación del *ACI 318M-14* a nuestro caso de estudio, se obtiene una resistencia cortante negativa. Estos valores no tienen ningún sentido físico ni permiten la comparación entre las simulaciones realizadas y el *ACI*. En consecuencia, en este apartado, se ha desestimado esta normativa como base de comparación.

En segundo lugar, evaluemos la formulación propuesta por el *EN 1992-1-1*. La consideración de las tracciones en el plano está definida por el término $“\sigma_{cp} = N_{Ed}/A_c”$, donde N_{Ed} es la fuerza normal a la que se somete la sección de estudio en Newtons, negativa para esfuerzos de tracción. A diferencia de la formulación propuesta por el *ACI*, los resultados que se obtienen con (2.2) tienen sentido físico, tal y como se puede observar en la tabla 4.5.

	ABAQUS	EN 1992-1-1	V_{ABAQUS}/V_{EN}
T=0% de T_{fis}	314,89	167,52	1,88
T=10% de T_{fis}	312,10	163,81	1,91
T=20% de T_{fis}	309,81	160,10	1,94
T=30% de T_{fis}	307,25	156,38	1,96
T=40% de T_{fis}	304,41	152,67	1,99
T=50% de T_{fis}	301,81	148,95	2,03
T=60% de T_{fis}	299,73	145,24	2,06
T=70% de T_{fis}	297,50	141,52	2,10
T=80% de T_{fis}	297,19	137,81	2,16
T=90% de T_{fis}	303,27	134,09	2,26
T=100% de T_{fis}	288,64	130,38	2,21
T=110% de T_{fis}	285,74	126,66	2,26
T=120% de T_{fis}	282,64	122,95	2,30
T=130% de T_{fis}	279,80	119,23	2,35
T=140% de T_{fis}	250,42	115,52	2,17
T=150% de T_{fis}	248,61	111,80	2,22

Tabla 4.5: Comparativa normativa-simulación para las cargas máximas de rotura y los respectivos casos de tracción en el plano

Si bien la formulación presentada en el *Eurocódigo* no es válida para nuestra configuración, podemos observar que la diferencia entre normativa y numérico aumenta con el nivel de tracciones en el plano aplicado.

En conclusión, se ha podido confirmar que las principales normativas de referencia, para el estudio de losas con tracciones en el plano y comportamiento bidireccional, no proponen una estimación adecuada ni capturan correctamente la fenomenología.

Las hipótesis consideradas para estos últimos cálculos se pueden encontrar en el Anejo 2, así como el proceso numérico de el caso $10\% T_{fis}$.

4.4 RESUMEN

En este capítulo, en primer lugar, se han introducido las consideraciones adicionales que se han tenido en cuenta con el fin de simular las tracciones en el plano. Asimismo, se ha presentado la carga límite a tracciones en el plano de la losa, valor de referencia para las simulaciones presentadas.

A continuación, se han comparado los motores de cálculo *implícito* y *explícito*. Este apartado nos ha permitido verificar el correcto funcionamiento del método *explícito*. Además, se ha constatado que existe un 13% de decalaje entre ambos métodos de cálculo, obteniendo mayores valores con el esquema *explícito*.

Por último, se han presentado los resultados obtenidos para las distintas simulaciones y se han comparado con el *Eurocódigo*. Esquemáticamente, las conclusiones relacionadas con las simulaciones presentadas se pueden resumir en los siguientes puntos:

- La resistencia a cortante en la losa presenta una reducción lineal conforme se aumentan las tracciones en el plano. Esta reducción es de un 4.03% y se extiende para valores de $130\% T_{fis}$. Para rangos de tensiones en el plano superiores, se observa un salto en la curva de tendencia. Esta discontinuidad es debida a la plastificación prematura de las armaduras debido a la aplicación de fuertes tracciones en el plano.

- La flecha asociada a la carga de rotura aumenta con el incremento de las tracciones en el plano, hasta tracciones de $120\%T_{fis}$. A partir de este valor, la flecha asociada a la carga máxima se ve reducida.
- La carga de fisuración, punto de intercambio entre la rama elástica y post-elástica, se reduce al aumentar las tracciones en el plano. En consecuencia, el comportamiento elástico de las losas se reduce al aumentar las tracciones en el plano.
- Para tensiones inferiores a T_{fis} , la losa presenta una respuesta con la misma rigidez elástica y post-elástica, sin importar el nivel de tracciones en el plano aplicado.
- Para el rango de valores estudiado ($0\%T_{fis}$ - $150\%T_{fis}$), todas las simulaciones presentan una rotura a cortante.
- Para el rango de valores estudiado ($0\%T_{fis}$ - $150\%T_{fis}$), todas las simulaciones presentan una redistribución de esfuerzos al acercarse a la carga de rotura. En efecto, se observa que los aceros longitudinales y transversales plastifican alrededor de la zona de rotura.
- La formulación propuesta por el *Eurocódigo* presenta valores más dispares conforme se aumenta el nivel de tracciones en las losas.

5 Conclusiones

A lo largo de este trabajo de final de máster se han estudiado diversos aspectos relacionados con la resistencia a cortante en losas sometidas a cargas puntuales. Desde múltiples puntos de vista, ya sean bibliográficos o numéricos, se han estudiado qué fenómenos o parámetros influyen a dicha resistencia.

Este trabajo ha servido para establecer una sólida base para la futura campaña experimental que se realizará en el Departamento de Ingeniería Civil y Ambiental de la UPC. El estudio paramétrico de la posición de la placa de carga o el análisis de la resistencia a cortante para losas sometidas a tracciones en el plano, serán de una gran utilidad para enriquecer los próximos trabajos de investigación.

Los puntos que se han tratado en este trabajo se pueden resumir en:

- Estudio bibliográfico del esfuerzo cortante en losas.
- Definición del modelo numérico y de las propiedades constitutivas.
- Análisis paramétrico sobre la influencia de ciertos parámetros en el comportamiento de una losa sometida a cargas puntuales y sin tracciones en el plano.
- Análisis cuantitativa y cualitativo del efecto de las tracciones en el plano sobre la resistencia a cortante en losas sometidas a cargas puntuales.
- Comparación de los resultados numéricos con normativas de referencia (*EN 1992-1-1* y *ACI 318M-14*).

De los distintos puntos tratados en este trabajo, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

1- Conclusiones derivadas del estado del conocimiento:

- La rotura a cortante en losas sometidas a cargas puntuales es un fenómeno levemente estudiado.

- La formulación propuesta por las normativas para verificar la resistencia a cortante en losas es empírica o semi-empírica. Asimismo, las fórmulas de diseño propuestas se basan en experimentos realizados en vigas fuertemente armadas, con flexión unidireccional. En consecuencia, estas no capturan correctamente la mecánica del problema para losas con comportamiento bidireccional.
 - Varios autores anuncian un importante decalaje entre los valores experimentales obtenidos y las normativas, para ensayos de losas de hormigón armado sometidas a cargas puntuales. Esto confirma la infravaloración que las normativas realizan con respecto a la resistencia a cortante en losas.
- 2- Conclusiones derivadas de la modelización numérica realizada, para el caso de losas sin tracciones en el plano:
- Los resultados obtenidos para el caso de losas sin tracciones en el plano son coherentes con resultados experimentales de ensayos similares. En la curva Carga-Desplazamiento se pueden identificar las tres ramas clásicas: elástica, post-fisuración y post-pico. Asimismo, se observa una rotura frágil, característica de la rotura a cortante.
 - El análisis de sensibilidad de la malla confirma la importancia de este parámetro para los NFEM. Se ha encontrado un rango de mallas adecuado al ensayo simulado, estableciendo 20mm como el valor de referencia.
 - El análisis de sensibilidad de la distancia Carga-Apoyo confirma los postulados establecido por *Kani* en [46]. A partir de $a/d^1 < 2.75$ se observa una rotura a cortante, creándose una biela de compresión entre la placa de carga y el apoyo. Confirmado el rango de valores a/d para la rotura a cortante, se establece $a/d=2.5$ como valor de referencia.
 - El análisis de las armaduras en el momento de la rotura confirma la capacidad de redistribución que presentan las losas, observado experimentalmente por varios autores.
 - Comparando la resistencia a cortante resultante del modelo base con el *Eurocódigo* y el *ACI*, se encuentran ratios numérico/norma de 1.63 y 1.74,

¹ Siendo “a” la distancia carga-apoyo y “d” la profundidad efectiva de las armaduras

respectivamente. Estos ratios son del mismo orden de magnitud que ciertos estudios experimentales introducidos en este trabajo.

3- Conclusiones derivadas de la modelización numérica realizada, con relación a los métodos de resolución numéricos:

- El método *implícito* permite calcular la carga última con una desviación estándar y un error relativo pequeños, para distintos tamaños de malla. En ese sentido, parece que el método *implícito* predice con exactitud la resistencia a cortante de la losa.
- El método *implícito* presenta importantes desventajas. Por un lado, requiere de un alto coste computacional (1 día por simulación). Por otro lado, presenta inestabilidades importantes en la rama post-ruptura.
- El método *explícito* presenta inestabilidades locales en términos de Carga-Desplazamiento. Este “ancho de respuesta” debe considerarse al estudiar valores medios o la carga máxima de las simulaciones.
- El método *explícito* presenta importantes ventajas. Por un lado, requiere de un coste computacional extremadamente menor al método *implícito* (20 min por simulación). Por otro lado, la respuesta de la losa no presenta grandes inestabilidades.
- El método *explícito* estima cargas últimas un 13% mayores a las estimaciones del método *implícito*.

4- Conclusiones derivadas de la modelización numérica realizada, para el caso de losas con tracciones en el plano:

- El aumento de las tracciones en el plano provoca una reducción de la resistencia a cortante en las losas sometidas a cargas puntuales. Esta reducción es lineal para valores inferiores al 130% de la resistencia a tracción de la sección de la losa ($1.3 T_{fis}$), y se estima al 4.03%. Para rangos de tensiones en el plano superiores, se observa un salto en la curva de tendencia. Esta discontinuidad es debida a la plastificación prematura de las armaduras debido a la aplicación de fuertes tracciones en el plano.
- La flecha asociada a la carga de rotura aumenta con el incremento de las tracciones en el plano, para valores $T < T_{fis}$.

- El rango del comportamiento elástico de la losa se reduce al aumentar el nivel de tracciones en el plano.
- La relación $a/d=2.5$ asegura una rotura por cortante para el rango de tracciones en el plano estudiado ($0\% T_{fis} - 150\% T_{fis}$).
- El análisis de las armaduras en el momento de la rotura confirma la capacidad de redistribución que presentan las losas, incluso para el caso con tracciones en el plano.

Este trabajo constituye el preámbulo de futuras investigaciones relacionadas con la evaluación de la resistencia a cortante en losas sometidas a cargas puntuales y a tracciones en el plano. Ejemplo de las posibles vías de investigación que permitirían dar continuidad a este trabajo serían:

- Estudiar otros parámetros que constituyen el modelo numérico presentado, con el fin de mejorar la calibración del modelo (energía de fractura, ángulo de dilatancia, resistencia a compresión, etc.).
- Comparar los resultados numéricos obtenidos con los resultados experimentales. Esto permitirá validar el modelo y calibrarlo para realizar futuros estudios paramétricos. La comparación se realizará en la futura campaña experimental.
- Estudiar otras geometrías y configuraciones que se hallen en la literatura, con el fin de confirmar el correcto funcionamiento del modelo constitutivo y de los métodos de resolución para nuestro caso de estudio.
- Extender este tipo de análisis a configuraciones más realistas. Simular un puente con zona de momentos negativos, con el fin de estudiar el fenómeno en toda su complejidad.
- Extender la formulación de cortante *Compression Chord Capacity Model* al caso de losas sometidas a cargas puntuales e incluir el efecto de las tracciones en el plano.

Bibliografía

- [1] Rextdixon.com. (n.d.). *Wood Beam Shear / Wooden Thing*. [online] Available at: <https://www.rexdixon.com/topic/wood-beam-shear> [Accessed 21 Mar. 2019].
- [2] Marí, A., Cladera, A., Bairán, J., Oller, E. and Ribas, C. (2014). Shear-flexural strength mechanical model for the design and assessment of reinforced concrete beams subjected to point or distributed loads. *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, Vol. 8, No. 4, pp.337-353.
- [3] Terras, R. (n.d.). Effect of point loads on reinforced concrete slabs without transverse reinforcement. [online] Available at: <https://fenix.tecnico.ulisboa.pt/downloadFile/395146022106/Resumo.pdf> [Accessed 5 Mar. 2019].
- [4] ASCE-ACI Committee 426. (1973). The shear strenght of reinforced concrete members. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 99, No. 6, pp. 1091-1187.
- [5] Taylor, H. P. J. (1972). Shear Strength of Large Beams. *Journal of the Structural Division - ASCE*, Vol. 98, No. ST11, pp. 2473-2490.
- [6] Fenwick, R. C., Paulay, T. (1968). Mechanisms of Shear Resistance of Concrete Beams. *Journal of the Structural Division - ASCE*, Vol. 94, No. ST10, pp. 2325-2350.
- [7] Kani, M. W., Huggins, M. W., Wittkopp, R. R. (1979). Kani on Shear in Reinforced Concrete. *University of Toronto, Dept of Civil Engineering, Toronto*, pp. 225.
- [8] Pruijssers, A. F. (1986). Shear resistance of beams based on the effective shear depth. *Stevinreport No. 5-86-1, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands*, pp. 69
- [9] Walraven, J.C. (1981). Fundamental Analysis of Aggregate Interlock. *Journal of the Structural Division-ASCE*, Vol. 107, No. 11, pp. 2245-2270.
- [10] Taylor, H. P. J. (1973). The fundamental behavior of reinforced concrete beams in bending and shear. *ACI symposium March and October 1973*, pp. 285-303.
- [11] Sherwood, E. G., Bentz, E. C., Collins, M. P. (2007). Effect of aggregate size on beam-shear strength of thick slabs. *ACI Structural Journal*, Vol. 104, No. 2, pp. 180-190.
- [12] Lin, F., Hua, J. and Dong, Y. (2017). Shear Transfer Mechanism of Concrete Strengthened with External CFRP Strips. *Journal of Composites for Construction*, Vol. 21, No. 2, p. 04016089.

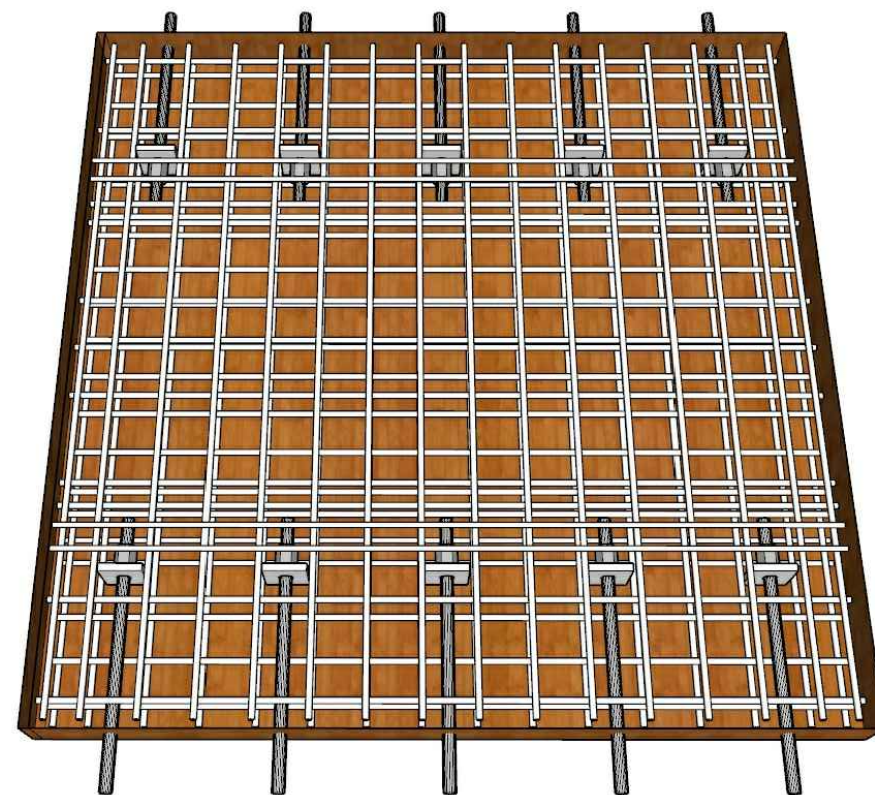
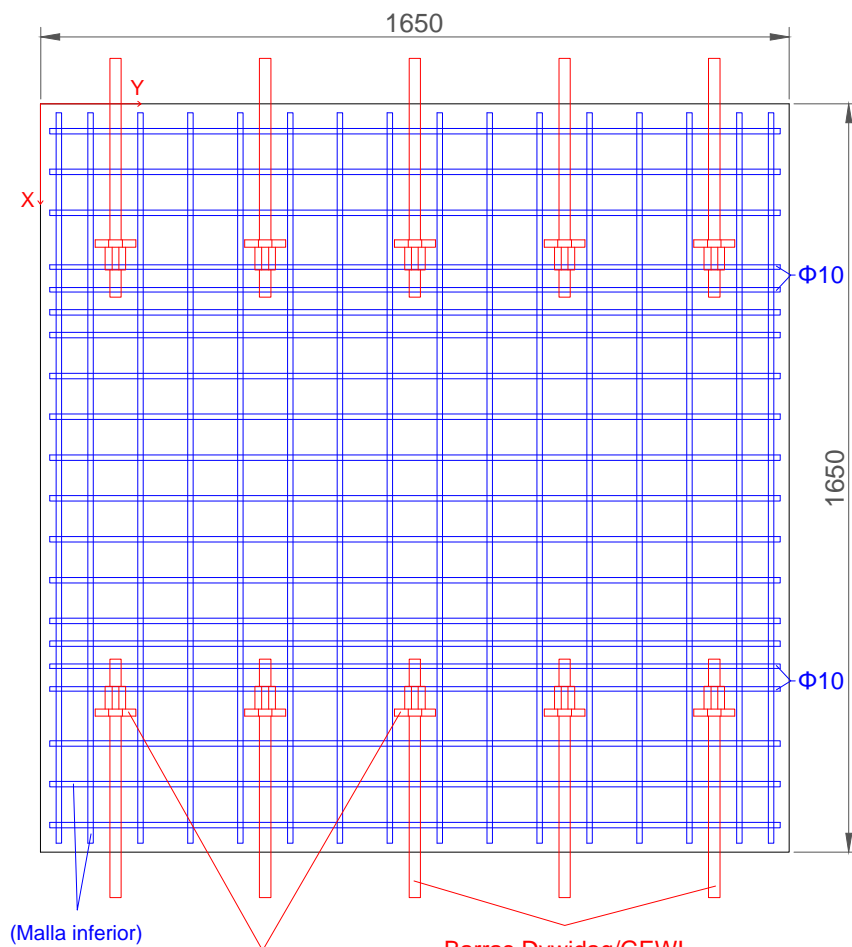
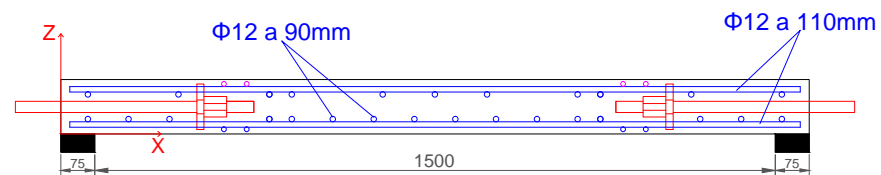
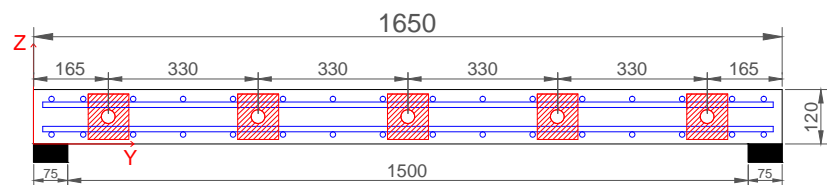
- [13] Cope, R. J. (1985) Flexural Shear Failure of Reinforced Concrete Slab Bridges. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers Part 2-Research and Theory*, Vol. 79, No. 9, pp. 559-58.
- [14] Ghazavy-Khorasgany, M., Gopalaratnam, V. (1993) Shear Strength of Concrete - Size and other influences. *Proceedings of the JCI International workshop on size effect in concrete structures, oct. 31 - nov. 2, Sendai, Japan*, pp. 51-62.
- [15] Ritter, W. (1899). Die Bauweise Hennebique. *Schweizerische Bauzeitung*, Vol. 33, No. 7, pp. 59-61.
- [16] Mörsch, E. (1908). Der Eisenbetonbau : Seine Theorie Und Anwendung. *Verlag Von Konrad Wittwer, Stuttgart*, pp. 368.
- [17] García Meseguer, Á. (2001). Hormigón armado (vol. II): cálculos en estado límite. *Fundación Escuela de la Edificación, Madrid*, pp. 324-325.
- [18] Lantsoght, E. (2013). Shear in reinforced concrete slabs under concentrated loads close to supports. *BOXPress, 's-Hertogenbosch*.
- [19] Sherwood, E. G., Lubell, A. S., Bentz, E. C. and Collins, M. R. (2006). One-way shear strength of thick slabs and wide beams. *ACI Structural Journal*, Vol. 103, pp. 794-802.
- [20] Natário, F., Fernández Ruiz, M. and Muttoni, A. (2014). Shear strength of RC slabs under concentrated loads near clamped linear supports. *Engineering Structures*, Vol. 76, pp.10-23.
- [21] Chauvel, D., Thonier, H., Coin, A., and Ile, N. (2007). Shear Resistance of slabs not provided with shear reinforcement. *CEN/TC 250/SC 02 N 726, France*, pp. 32.
- [22] Hofbeck, J. A., Ibrahim, I. O. and Mattock, A. H. (1969). Shear Transfer in Reinforced Concrete. *ACI Journal Proceedings*, Vol. 66, pp. 119-128.
- [23] Muttoni A., Fernández Ruiz M. (2008). Shear strength of members without transverse reinforcement as function of critical shear crack width. *ACI Structural Journal*, Vol. 105, No. 2, pp. 163-172.
- [24] AFNOR. (2007). Eurocode 2. Calcul des structures en béton. Partie 1.1 : règles générales et règles pour les bâtiments. Annexe nationale à la NF EN 1992-1-1 : 2005, NF EN 1992-1-1.
- [25] ACI Committee 318-11. (2005). Building code requirements for structural concrete (ACI 318M-14). *Farmington Hills: ACI American Concrete Institute*.

- [26] DAfStb. (2010). Deutscher Ausschuss für Stahlbeton Heft 525: Erläuterungen zu DIN 1045-1. *German Committee for Structural Concrete Book 525: Comments on DIN 1045-1*, Beuth Verlag, Berlin.
- [27] Rombach, G. and Kohl, M. (2013). Shear Design of RC Bridge Deck Slabs according to Eurocode 2. *Journal of Bridge Engineering*, Vol. 18, No. 12, pp. 1261-1269.
- [28] Fédération Internationale du Béton (fib). (2012). Model Code 2010 - Volume 1 et 2. Final draf.
- [29] Reissen, K. and Hegger, J. (2012). Shear Capacity of Reinforced Concrete Slabs under Concentrated Loads. *IABSE Congress Report*, Vol. 18, No. 17, pp. 966-973.
- [30] Rombach, G. and Latte, S. (2009). Querkrafttragfähigkeit von Fahrbahnplatten ohne Querkraftbewehrung. *Beton und Stahlbetonbau*, Vol. 104, No. 10, pp. 642-656.
- [31] Vaz Rodrigues, R., Fernández Ruiz, M. and Muttoni, A. (2008). Shear strength of R/C bridge cantilever slabs. *Engineering Structures*, Vol. 30, No. 11, pp. 3024-3033.
- [32] Jaeger, T. (2009). Reinforced Concrete Slab Shear Prediction Competition: Experiments. *ACI Structural Journal*, Vol. 106, No. 3.
- [33] Dassault Systèmes Simulia Corp. (2012). Abaqus Analysis User's Manual Volume 2: Analysis. *Providence, RI, USA*.
- [34] Leahu-Aluas, I. and Abed-Meraim, F. (2011). A proposed set of popular limit-point buckling benchmark problems. *Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 38, No. 6, pp. 767-802.
- [35] Course *Computational Engineering*, MECCP, course 2018/2019. ETSECCPB- UPC. Course coordinator: Rodríguez, A.
- [36] Domingo, M. (2018). Resistencia a punzonamiento en losas de tableros de puentes de hormigón armado en zonas sometidas a momentos negativos.
- [37] Adetifa, B. y Polak, M. (2005). Retrofit Of Interior Slab Column Connections For Punching Using Shear Bolts. *ACI Structural Journal*, Vol. 2, pp. 268-274.
- [38] Wahalathantri, B.L.Thambiratnam, D., Chan, T. y Fawzia, S. (2011). A Material Model for Flexural Crack Simulation in Reinforced Concrete Elements Using Abaqus. *Proceedings of the First International Conference on Engineering, Designing and Developing the Built Environment for Sustainable Wellbeing*, pp. 260-264.
- [39] Dere, Y. y Koroglu, M. A. (2017). Nonlinear FE Modeling of Reinforced Concrete.

- International Journal of Structural and Civil Engineering Research*, Vol. 6, pp. 71-74.
- [40] Genikomsou, A. and Polak, M. (2015). Finite element analysis of punching shear of concrete slabs using damaged plasticity model in ABAQUS. *Engineering Structures*, Vol. 98, pp. 38-48.
 - [41] Dassault Systèmes Simulia Corp. (2012). Abaqus Analysis User's Manual Volume 3: Materials. *Providence, RI, USA*.
 - [42] Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S. y Oñate, E. (1989). A Plastic-Damage Model for Concrete. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 25, pp. 299-329.
 - [43] Lee, J. y Fenves, G. L. (1998). Plastic-Damage Model for Cyclic Loading of Concrete Structures. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 124, pp. 892-900.
 - [44] Hillerborg, A., Modéer, M. and Petersson, P. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, Vol. 6, pp. 773-782.
 - [45] Dassault Systèmes Simulia Corp. (2012). Abaqus Analysis User's Manual Volume 5: Prescribed conditions, Constraints & Interactions. *Providence, RI, USA, 2012*.
 - [46] Kani, G. (1966). Basic facts concerning shear failure. *ACI Journal Proceedings*, Vol. 63, No. 6, pp. 675-692.

Anejos

ANEJO 1: PLANOS



(Malla inferior)

Placas de anclaje
Dywidag/GEWI AR

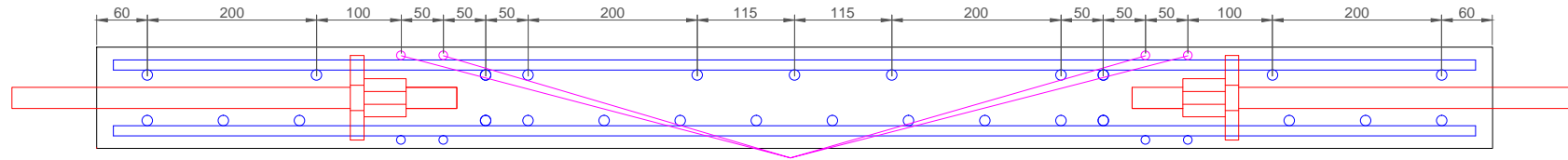
Barras Dywidag/GEWI
($\Phi 25$)

Cotas en mm

Grupo: Grupo A

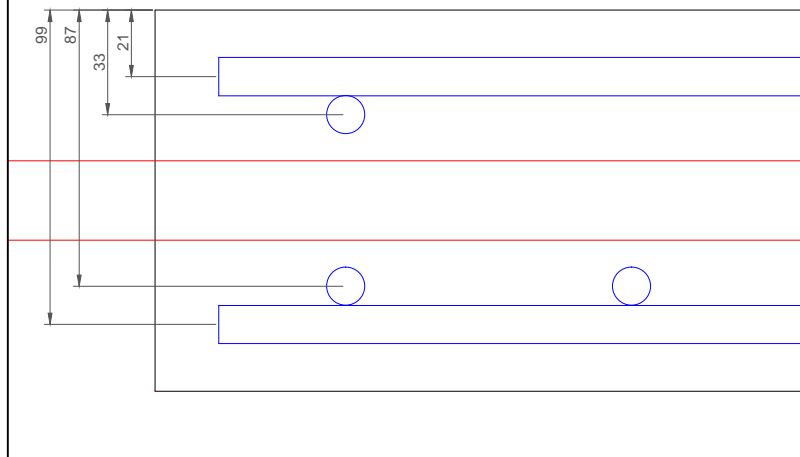
Plano: Datos generales

Total armadura transversal cara superior: 11 redondos $\Phi 12$ de 1610mm de longitud
4 redondos $\Phi 10$ de 1610mm de longitud

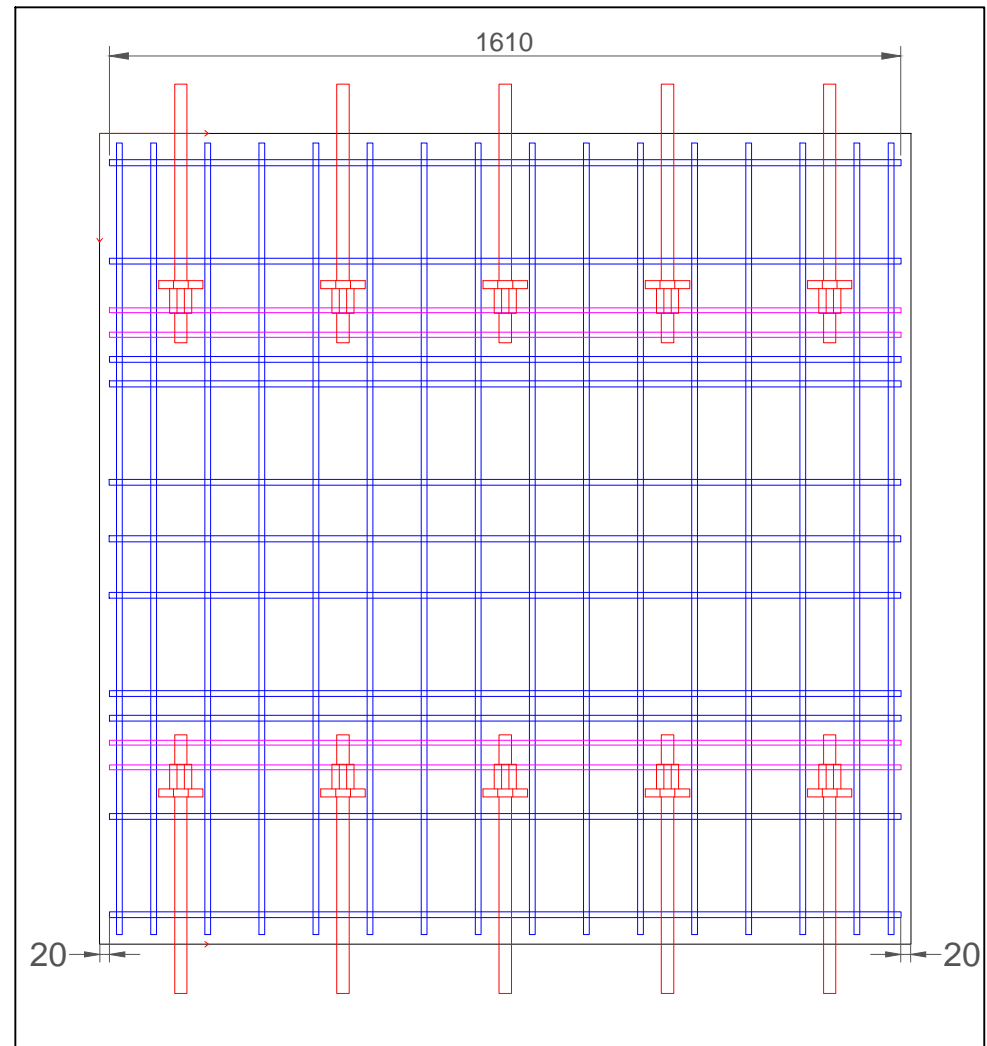
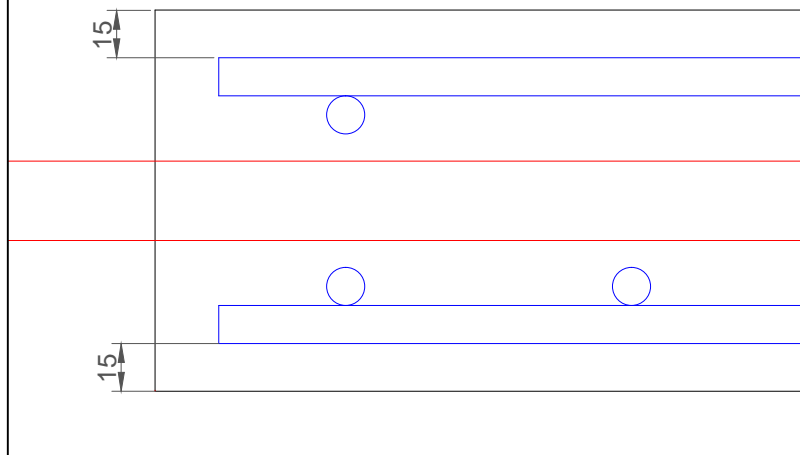


$\Phi 10$ A SOLDAR DESPUES
DE COLOCAR EL ANCLAJE

Detalle cantos útiles



Detalle recubrimientos

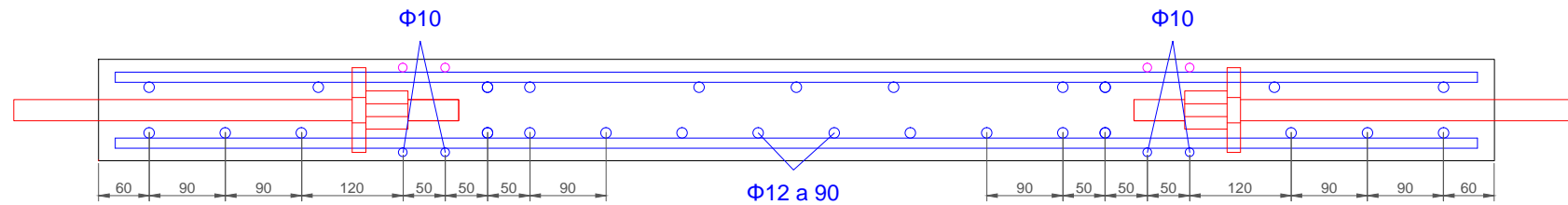


Cotas en mm

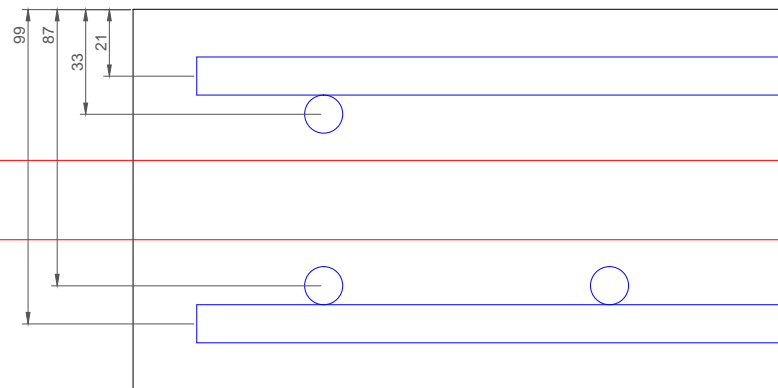
Grupo: Grupo A

Plano: Armado transversal
cara superior

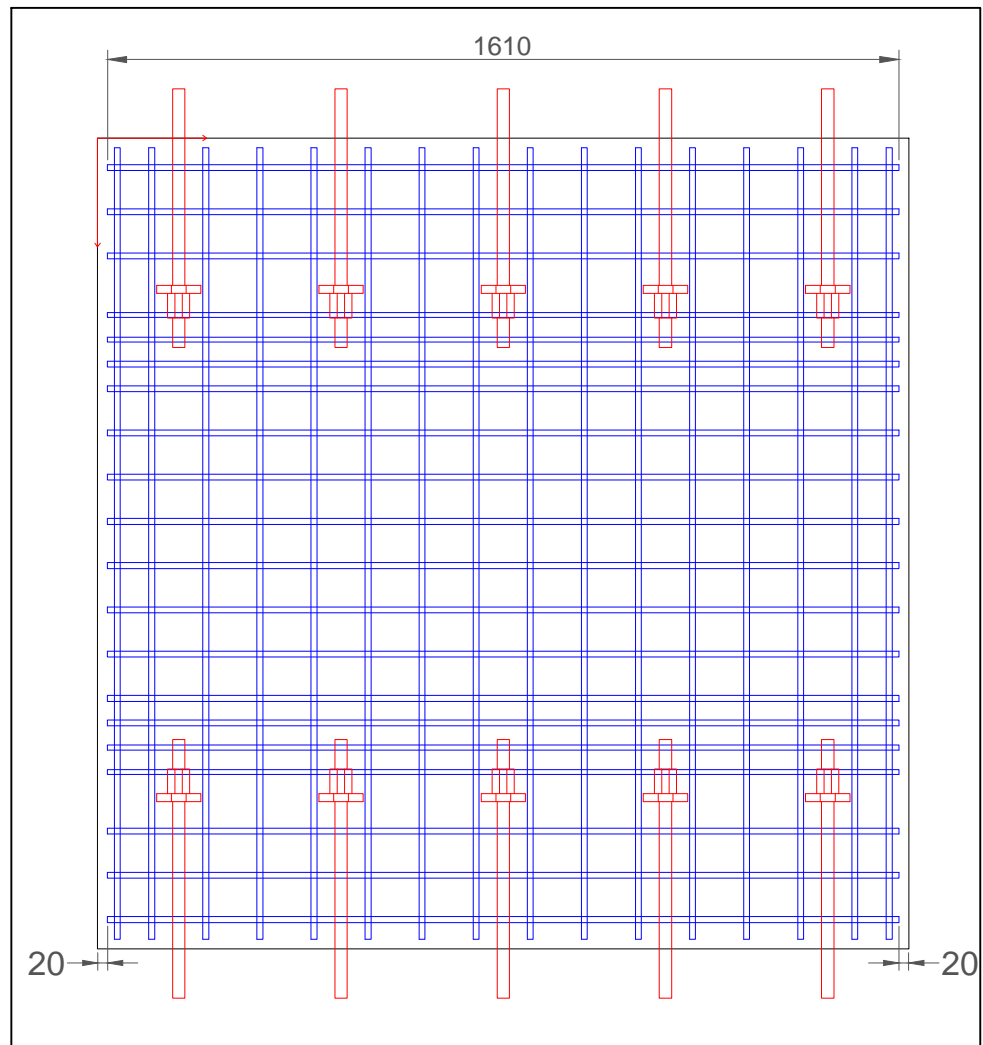
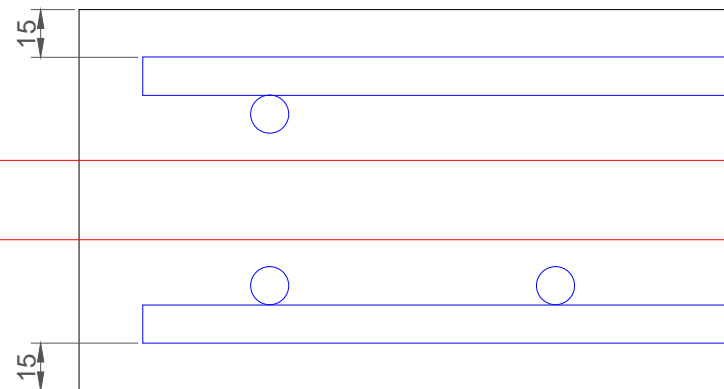
Total armadura transversal cara inferior: 16 redondos $\Phi 12$ de 1610mm de longitud
4 redondos $\Phi 10$ de 1610mm de longitud



Detalle cantos útiles



Detalle recubrimientos

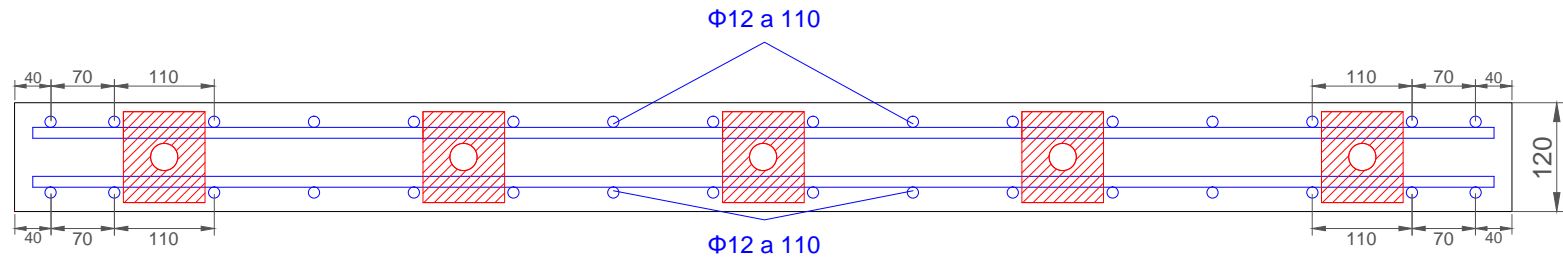


Cotas en mm

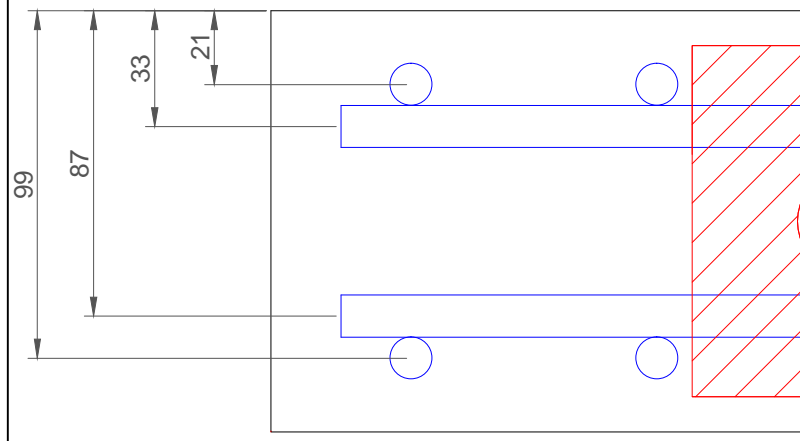
Grupo: Grupo A

Plano: Armado transversal
cara inferior

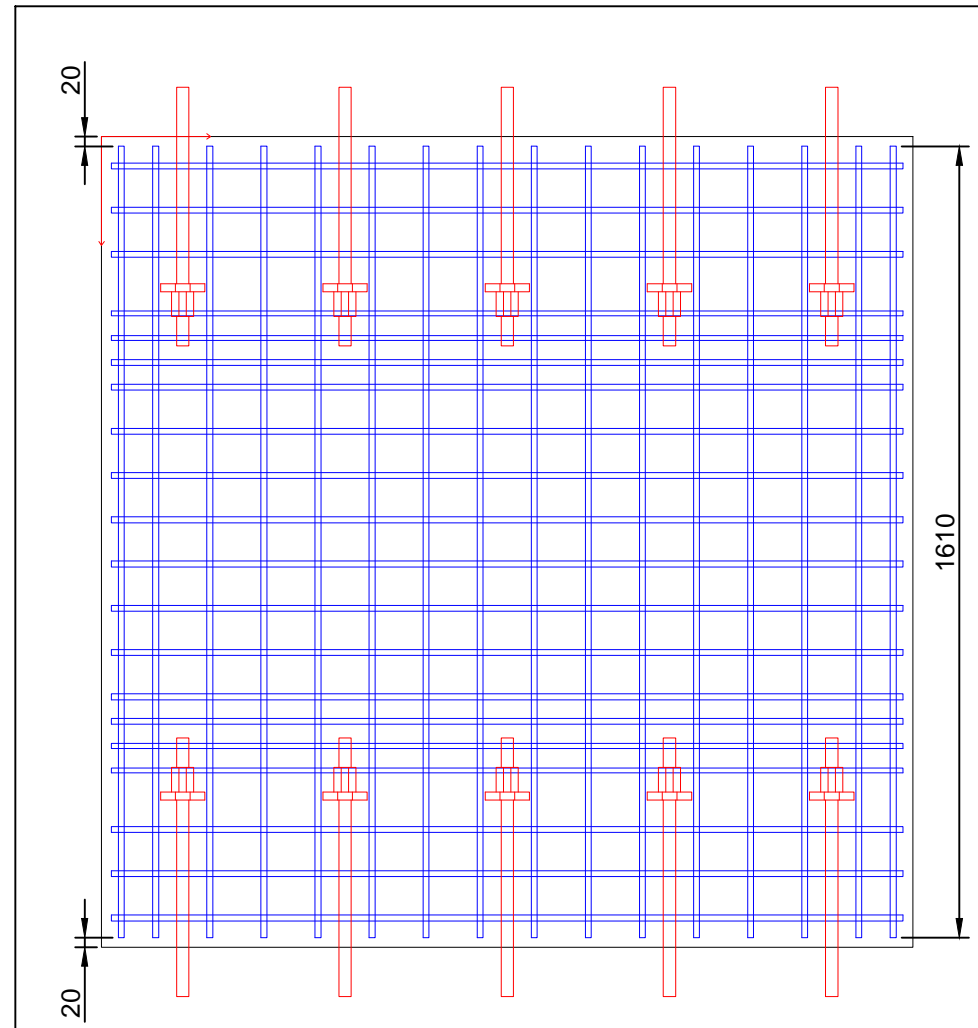
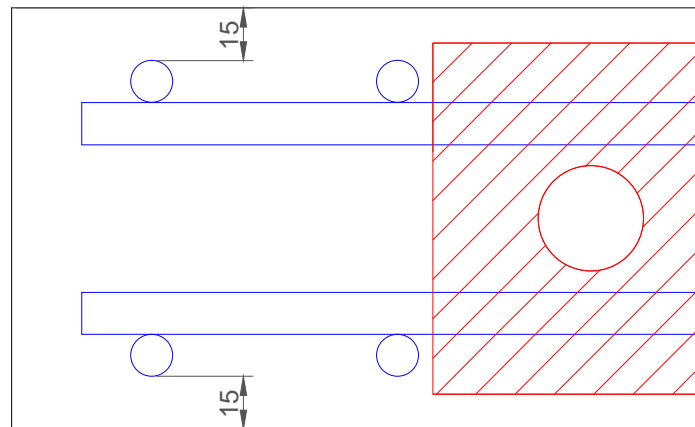
Total armadura longitudinal: 32 redondos $\Phi 12$ de 1610mm de longitud (16 arriba 16 abajo)

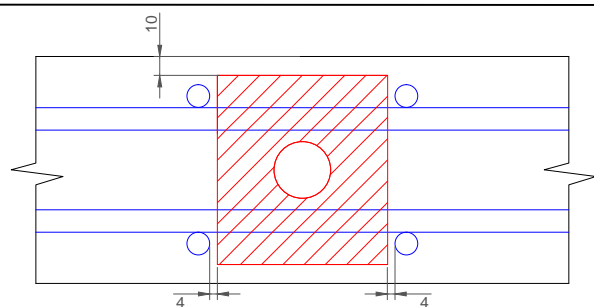
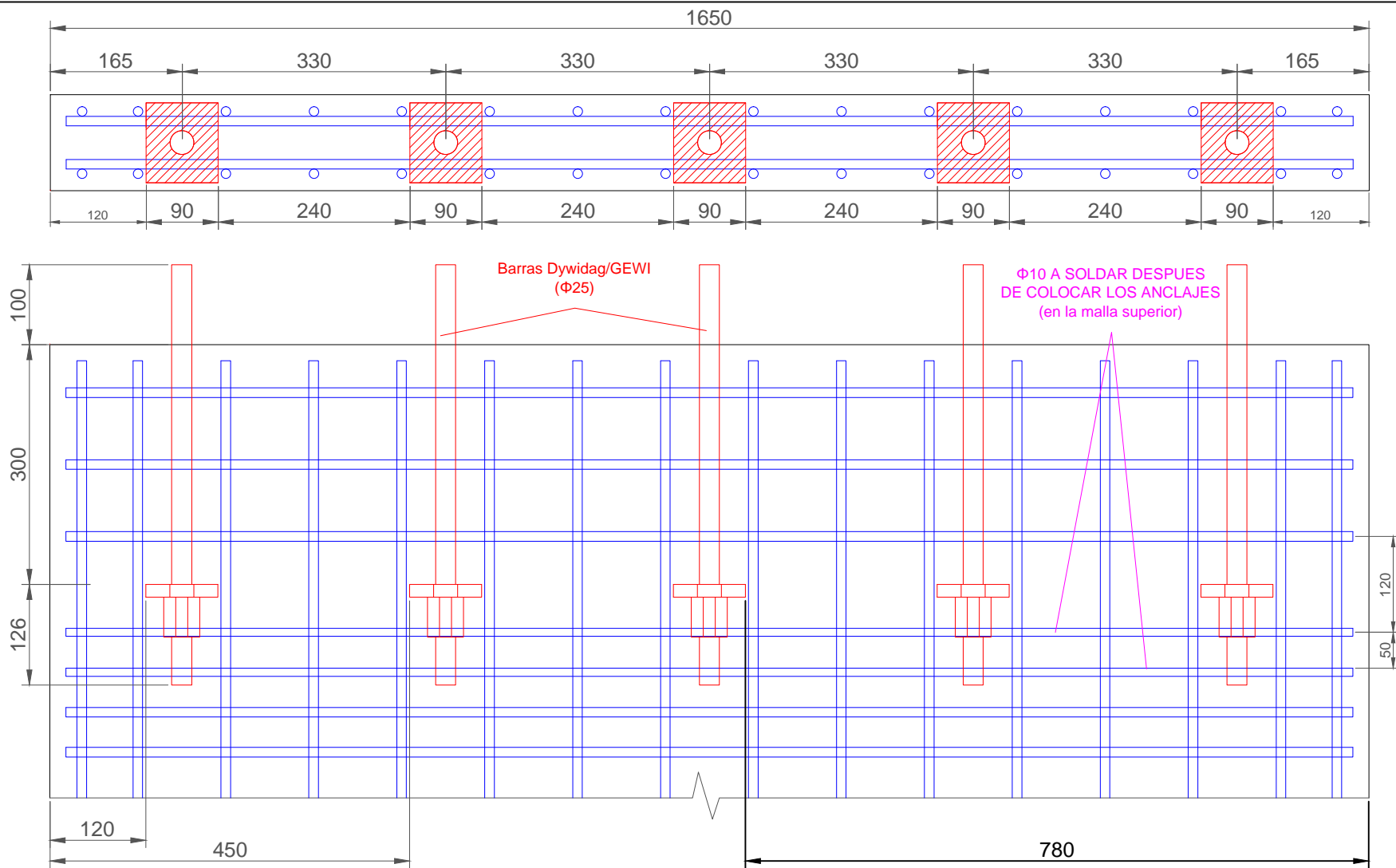


Detalle cantos útiles

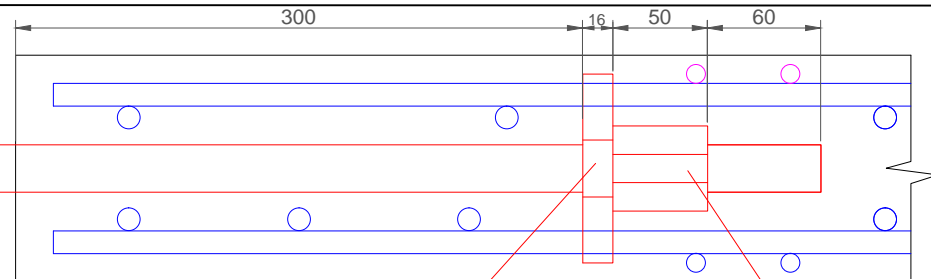


Detalle recubrimientos





Barra Dywidag/GEWI (Φ25)



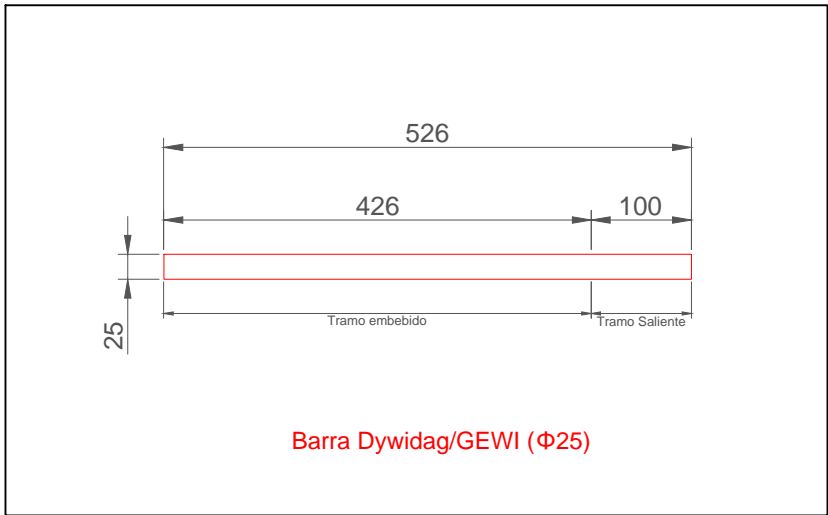
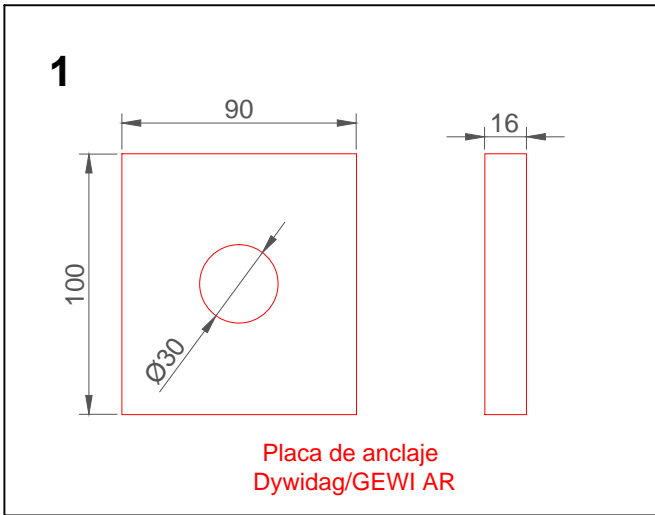
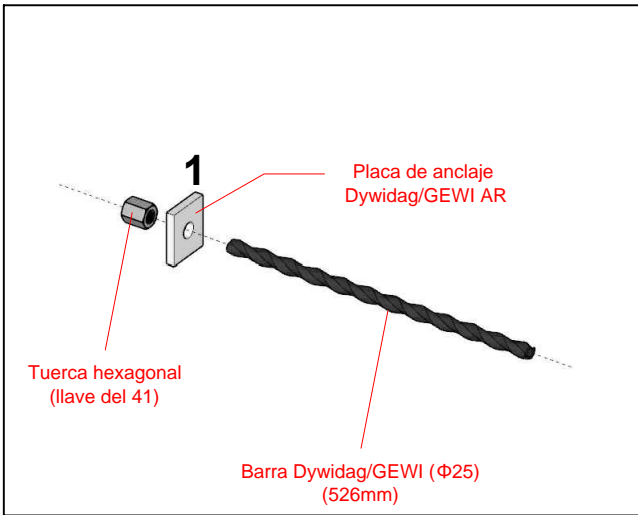
Placa de anclaje Dywidag/GEWI AR t=16mm

Tuerca hexagonal (llave del 41)

Cotas en mm

Grupo: Grupo A

Plano: Detalle posición placas



ESQUEMA DE MONTAJE

$\Phi 10$ No colocar todavía

$\Phi 10$ No colocar todavía

1. Montar la armadura sin los $\Phi 10$ de la cara superior

2. Introducir la pieza N°1 de las placas de anclaje entre la armadura longitudinal introduciendola por la cara superior

3. Introducir las barras Dywidag y roscarlas a las placas de anclaje. Fijar el conjunto para el hormigonado

$\Phi 10$ cara superior

$\Phi 10$ cara superior

4. Soldar los $\Phi 10$ de la cara superior

Cotas en mm

Grupo: Grupo A	Plano: Detalle anclajes
----------------	-------------------------

ANEJO 2: CÁLCULOS

Este Anejo tiene el objetivo de presentar el detalle o la justificación de ciertos cálculos que se han presentado a lo largo del trabajo. Si bien se asume el pre-diseño de la losa y su armado realizado por *Pablo Gonzalo Fernández*, estos cálculos constituyen una referencia o una segunda verificación de los cálculos presentados a lo largo de este trabajo.

Verificación a cortante (caso base)

A continuación se presentan los resultados presentados en la sección §3.3.3 de este trabajo.

EN 1992-1-1

Recordemos que el esfuerzo cortante resistente según el *Eurocódigo* [24], se define como el máximo de las siguientes expresiones:

$$V_{Rd,c} = \max \begin{cases} [C_{Rd,c} \cdot k \cdot (100\rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} + k_1 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d = V_{Rd,c,1} \\ [v_{min} + k_1 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d = V_{Rd,c,2} \end{cases}$$

Por un lado, debido que para este caso de estudio no existen tracciones en el plano:

$$N_{Ed} = 0 \rightarrow \sigma_{cp} = N_{Ed}/A_c = 0$$

Por otro lado, considerando el cálculo del ancho efectivo según el *Annexe Nationale Française* expuesto en [21] (ver figura 2.18):

$$b_w \equiv b_{eff} = 2 \cdot a + 2 \cdot d = 2 \cdot 237.5 + 2 \cdot 95 = 775 \text{ mm}$$

Para calcular el área de la sección de armaduras en la dirección traccionada y en la cara inferior (A_{sl}), se ha realizado un prorrata entre el ancho efectivo (b_{eff}) y el ancho total de la losa (b). Esto nos permite tratar el cálculo, desde un punto de vista analítico, de una forma generalizada. Así pues, debido que hay 16 redondos $\varnothing 12\text{mm}$ en la cara inferior con un área de 1.13cm^2 por barra, se propone:

$$A_{sl} = [1.13 \cdot 16] \cdot 10^2 \cdot \frac{b_{eff}}{b} = [1.13 \cdot 16] \cdot 10^2 \cdot \frac{775}{1650} = 849.21 \text{ mm}^2$$

Así pues, se puede calcular $V_{Rd,c,1}$ según:

$$f_{ck} = 35 \text{ MPa} \quad \& \quad d = 95 \text{ mm} \quad \& \quad h = 120 \text{ mm}$$

$$C_{Rd,c} = 0.18/\gamma_c = 0.18$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1 + \sqrt{\frac{200}{95}} = 2.45 \rightarrow k = 2.0$$

$$\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w \cdot d} = \frac{849.21}{775 \cdot 95} = 0.0054$$

$$\begin{aligned} V_{Rd,c,1} &= [C_{Rd,c} \cdot k \cdot (100\rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} + k_1 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d \\ &= [0.18 \cdot 2 \cdot (100 \cdot 0.0054 \cdot 35)^{1/3} + 0] \cdot 775 \cdot 95 = 167.53 \text{ kN} \end{aligned}$$

Considerando que, para el caso de losas, $v_{min} = 0.23 \cdot f_{ck}^{1/2}$, se puede calcular $V_{Rd,c,2}$ según:

$$V_{Rd,c,2} = [v_{min} + k_1 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d = [0.23 \cdot 35^{1/2} + 0] \cdot 775 \cdot 95 = 100.18 \text{ kN}$$

Finalmente, podemos evaluar la resistencia a cortante según la EN 1992-1-1 tal que:

$$V_{Rd,c} = \max(V_{Rd,c,1}; V_{Rd,c,2}) = \mathbf{167.53 \text{ kN}}$$

ACI 318M-14

Recordemos que el esfuerzo cortante resistente según el ACI [25] se define según:

$$V_c = 0.17 \left(1 + \frac{N_u}{3.5A_g} \right) \lambda \sqrt{f'_c} \cdot b_w d$$

Particularizando para el caso base de estudio, obtenemos:

$$f'_c = 35 \text{ MPa} \quad \& \quad d = 95 \text{ mm} \quad \& \quad h = 120 \text{ mm} \quad \& \quad b_w = 1650 \text{ mm}$$

$$N_u = 0 \text{ kN} \quad \& \quad \lambda = 1$$

$$A_g = b_w \cdot h = 1650 \cdot 120 = 198000 \text{ mm}^2$$

$$V_c = 0.17 \left(1 + \frac{N_u}{3.5A_g} \right) \lambda \sqrt{f'_c} \cdot b_w d = 0.17 \left(1 + \frac{0}{3.5A_g} \right) 1 \sqrt{35} \cdot 1650 \cdot 95 = \mathbf{157.65 \text{ kN}}$$

Cálculo de las tracciones admisibles

En este apartado se justifican las expresiones en §4.1, las cuales justifican las tracciones admisibles límites de diseño. Recordemos que se ha definida esta tracción de fisura según:

$$T_{fis} = \left\{ h \cdot L + \frac{E_s}{E_c} \cdot 16 \cdot S_{fi12} \right\} \cdot f_{ctm} = 666.021 \text{ kN}$$

De la expresión anterior, identificamos:

- $h = 120 \text{ mm}$: espesor de la losa
- $L = 1650 \text{ mm}$: longitud de la losa
- $E_s = 200,000 \text{ MPa}$: módulo de Young del acero
- $E_c \equiv E_{0.4} = 38,153.82 \text{ MPa}$: módulo de Young del hormigón (parte elástica lineal)
- $S_{fi12} = \pi \cdot 6^2$: sección teórica de un redondo de 12mm
- $f_{ctm} = 0.3 \cdot f_{ck}^{2/3} = 0.3 \cdot 35^{2/3} = 3.21 \text{ MPa}$: resistencia a tracción del hormigón

En la expresión anterior, " $h \cdot L \cdot f_{ctm}$ " hace referencia a la contribución del hormigón a la tracción admisible. " $\frac{E_s}{E_c} \cdot 16 \cdot S_{fi12} \cdot f_{ctm}$ " hace referencia a la contribución de los aceros.

El número "16" hace referencia a la cantidad de aceros que se encuentran en la dirección de tracciones, considerando que la simulación representa únicamente la mitad de la losa (simetría). Así pues, de los 16 redondos en la cara superior y los 16 redondos en la cara inferior, consideramos la mitad para el cálculo de T_{fis} .

Verificación a cortante (caso con tracciones en el plano)

A continuación se detallan los resultados presentados en la sección §4.3.2 de este trabajo, para el caso con tracciones en el plano de $10\%T_{fis}$. Recordemos que el esfuerzo cortante resistente según el *Eurocódigo* [24], se define como el máximo de las siguientes expresiones:

$$V_{Rd,c} = \max \left\{ \begin{array}{l} [C_{Rd,c} \cdot k \cdot (100\rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} + k_1 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d = V_{Rd,c,1} \\ [v_{min} + k_1 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d = V_{Rd,c,2} \end{array} \right.$$

Por un lado, debido que las tracciones en plano son de $10\%T_{fis}$:

$$N_{Ed} = 10\%T_{fis} = 0.1 \cdot 666,021 \rightarrow \sigma_{cp} = N_{Ed}/A_c = \frac{66,602.1}{198000} = -0.34 \text{ [N/mm}^2\text{]}$$

Por otro lado, considerando el cálculo del ancho efectivo según el *Annexe Nationale Française* expuesto en [21] (ver figura 2.18):

$$b_w \equiv b_{eff} = 2 \cdot a + 2 \cdot d = 2 \cdot 237.5 + 2 \cdot 95 = 775 \text{ mm}$$

Para calcular el área de la sección de armaduras en la dirección traccionada y en la cara inferior (A_{sl}), se ha realizado un prorrata entre el ancho efectivo (b_{eff}) y el ancho total de la losa (b). Esto nos permite tratar el cálculo, desde un punto de vista analítico, de una forma generalizada. Así pues, debido que hay 16 redondos $\varnothing 12\text{mm}$ en la cara inferior con un área de 1.13cm^2 por barra, se propone:

$$A_{sl} = [1.13 \cdot 16] \cdot 10^2 \cdot \frac{b_{eff}}{b} = [1.13 \cdot 16] \cdot 10^2 \cdot \frac{775}{1650} = 849.21 \text{ mm}^2$$

Así pues, se puede calcular $V_{Rd,c,1}$ según:

$$f_{ck} = 35 \text{ MPa} \quad \& \quad d = 95 \text{ mm} \quad \& \quad h = 120 \text{ mm}$$

$$C_{Rd,c} = 0.18/\gamma_c = 0.18$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1 + \sqrt{\frac{200}{95}} = 2.45 \rightarrow k = 2.0$$

$$\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w \cdot d} = \frac{849.21}{775 \cdot 95} = 0.0054$$

$$\begin{aligned} V_{Rd,c,1} &= [C_{Rd,c} \cdot k \cdot (100\rho_l \cdot f_{ck})^{1/3} + k_1 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d \\ &= [0.18 \cdot 2 \cdot (100 \cdot 0.0054 \cdot 35)^{1/3} - 0.15 \cdot 0.34] \cdot 775 \cdot 95 = 163.81 \text{ kN} \end{aligned}$$

Considerando que, para el caso de losas, $v_{min} = 0.23 \cdot f_{ck}^{1/2}$, se puede calcular $V_{Rd,c,2}$ según:

$$V_{Rd,c,2} = [v_{min} + k_1 \cdot \sigma_{cp}] \cdot b_w \cdot d = [0.23 \cdot 35^{1/2} - 0.15 \cdot 0.34] \cdot 775 \cdot 95 = 96.47 \text{ kN}$$

Finalmente, podemos evaluar la resistencia a cortante según la EN 1992-1-1 tal que:

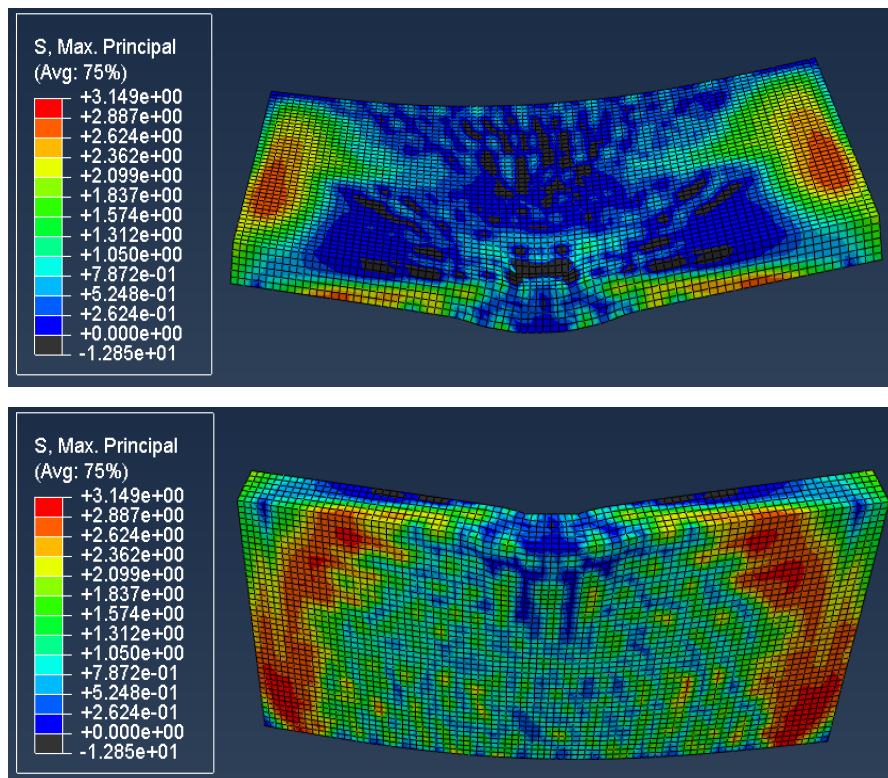
$$V_{Rd,c} = \max(V_{Rd,c,1}; V_{Rd,c,2}) = \mathbf{163.81 \text{ kN}}$$

ANEJO 3: RESULTADOS GRÁFICOS Y CARTOGRAFÍAS

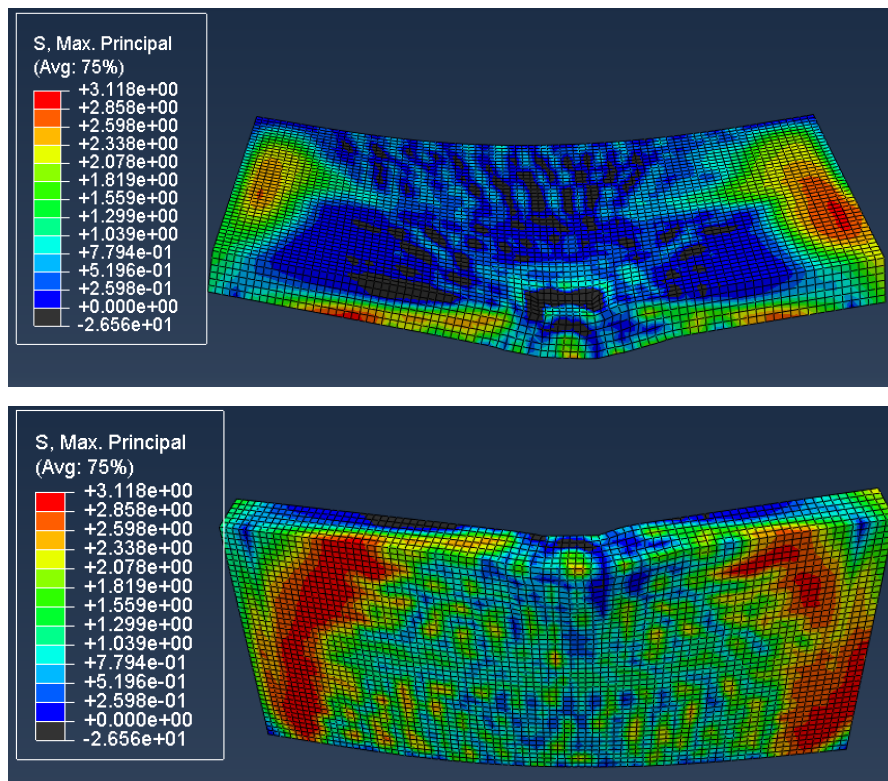
Este Anejo tiene el objetivo de presentar las cartografías de las distintas simulaciones que se han realizado para estudiar la influencia de la relación a/d. Se presentarán cartografías de las tensiones principales máximas, para cada una de las simulaciones realizadas y en el momento de carga máxima

Este Anejo complementa el apartado §3.3.1.

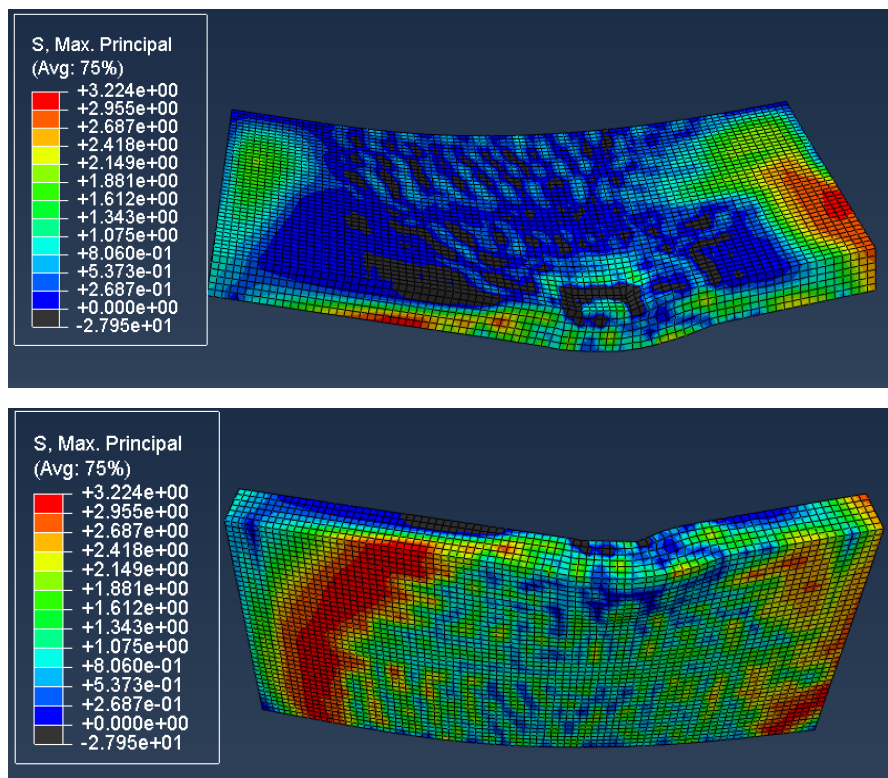
Simulación con carga centrada



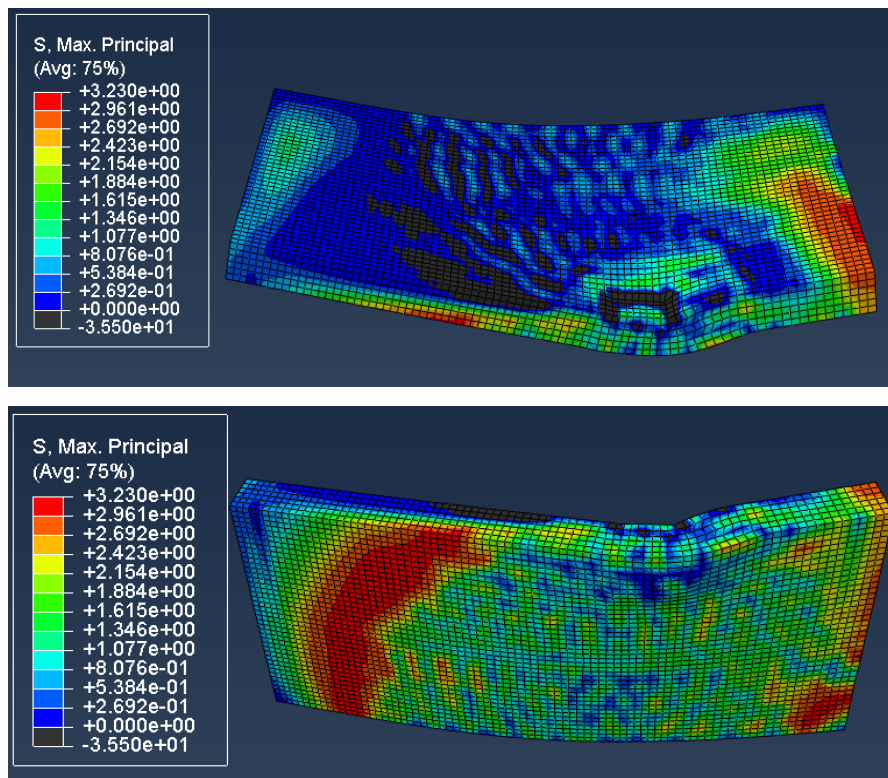
Simulación con $a/d=7$



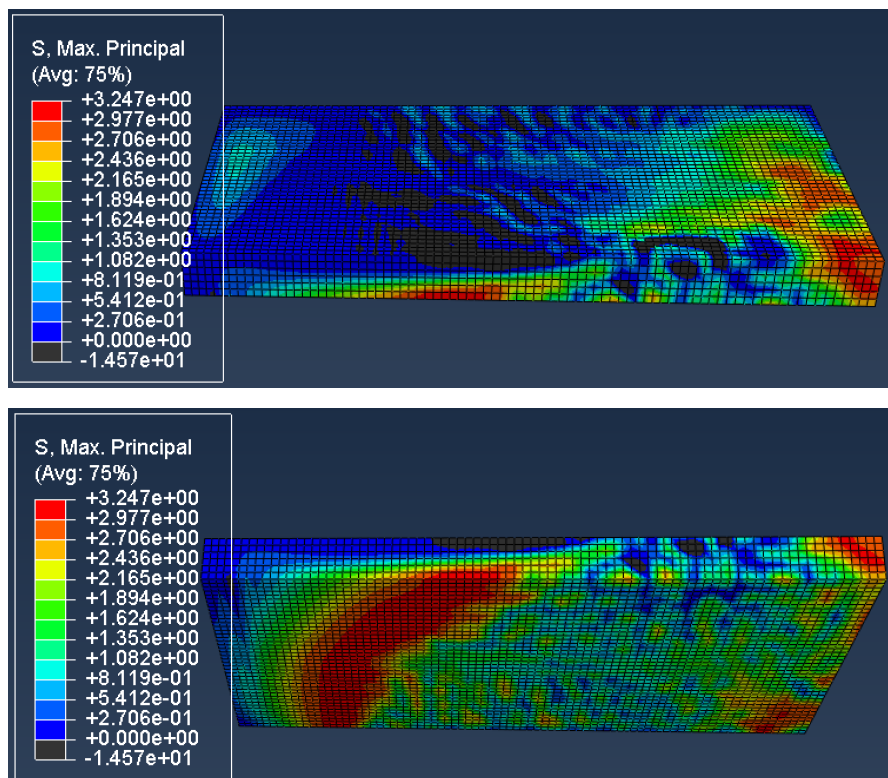
Simulación con $a/d=6$



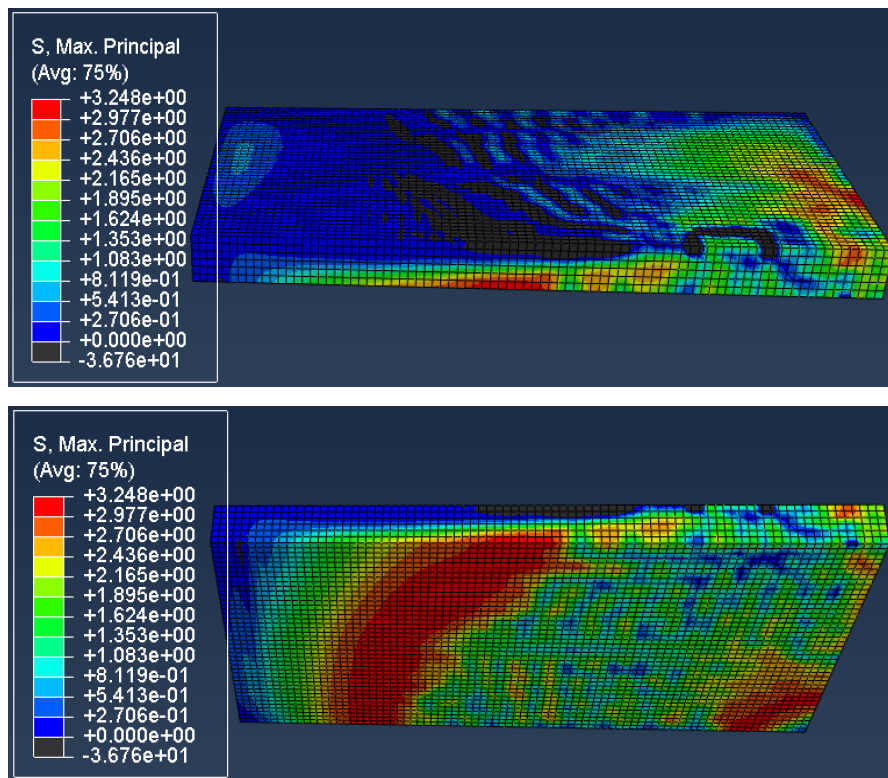
Simulación con $a/d=5$



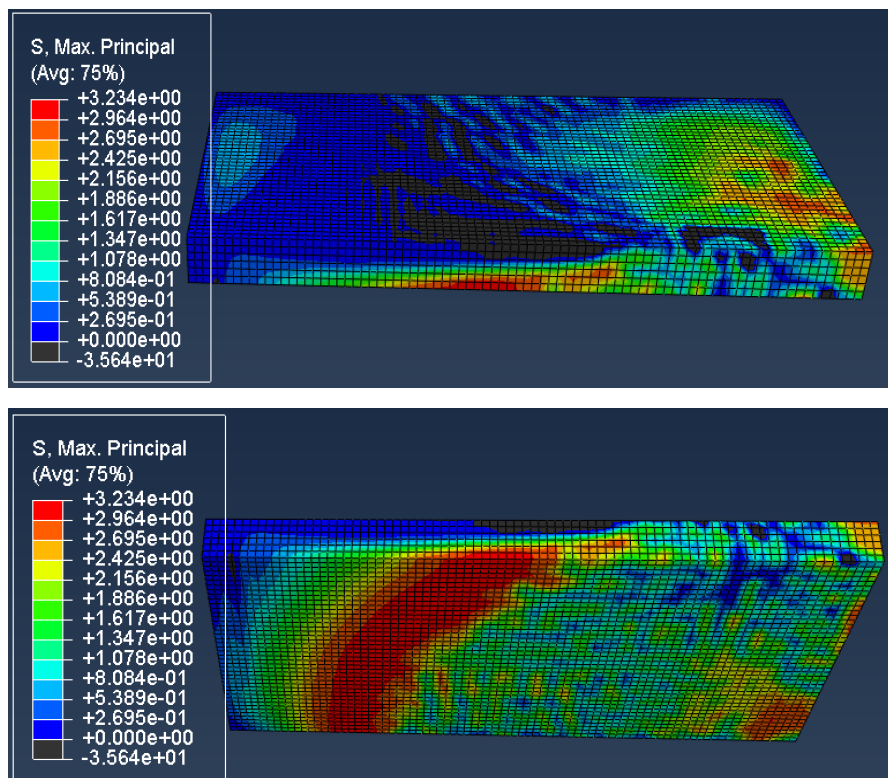
Simulación con $a/d=4$



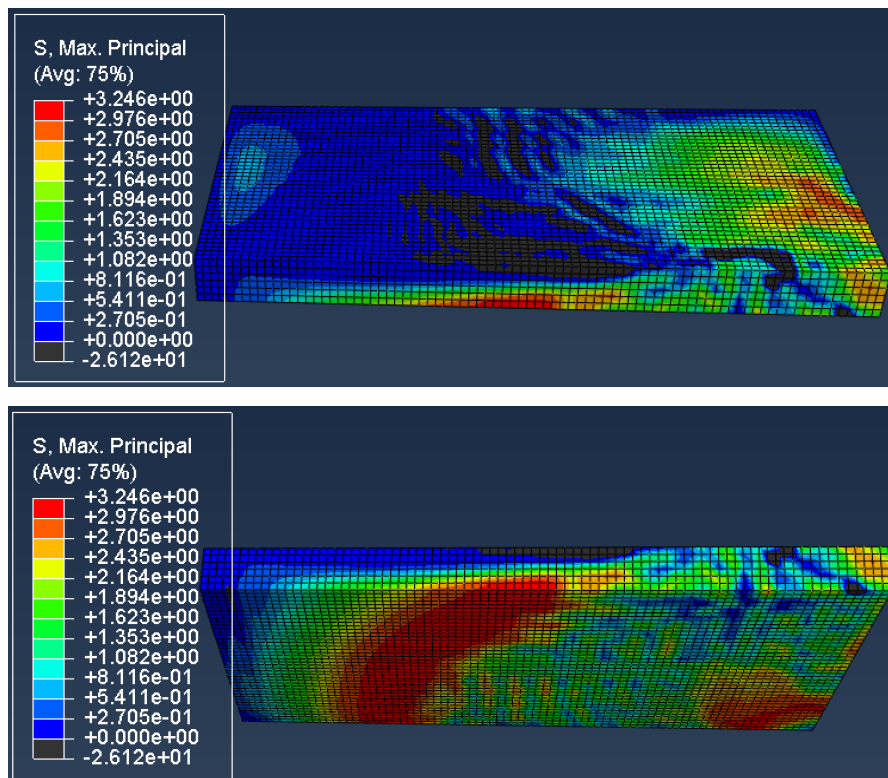
Simulación con $a/d=3$



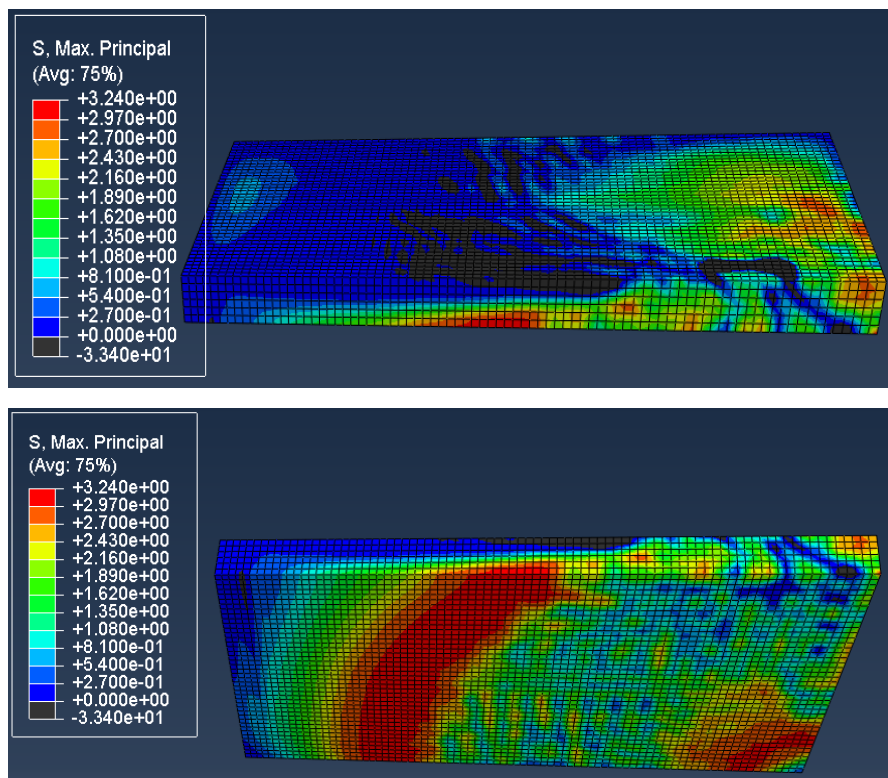
Simulación con $a/d=2.75$



Simulación con $a/d=2.5$



Simulación con $a/d=2.25$



Simulación con $a/d=2$

